

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2007

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Rango de una matriz con parámetro

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Como es una matriz cuadrada de orden tres, calculamos el determinante. Si es distinto de cero, el rango es tres:

$$\det A = m(m-2).$$

Por tanto, para $m \neq 0, 2$ se tiene $\text{rg}(A) = 3$. Cuando $m = 0$ o $m = 2$, el determinante se anula y hay que comprobar si el rango baja a dos. Para $m = 0$, el menor de las filas primera y tercera y columnas segunda y tercera vale

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Para $m = 2$, el menor de las filas primera y tercera y columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Así, en ambos valores el rango es al menos dos; como el determinante de orden tres es cero, el rango no puede ser tres. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $m \neq 0, 2$, y $\text{rg}(A) = 2$ si $m = 0$ o $m = 2$.

Opción A - Ejercicio 2. Ecuación matricial de semejanza

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix},$$

y buscamos una matriz invertible X tal que $XAX^{-1} = B$. Multiplicando por X a la derecha, la condición equivale a $XA = BX$. Escribimos $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y comparamos entradas:

$$XA = \begin{pmatrix} 2p & -q \\ 2r & -s \end{pmatrix}, \quad BX = \begin{pmatrix} 8p-9r & 8q-9s \\ 6p-7r & 6q-7s \end{pmatrix}.$$

La igualdad da $p = \frac{3}{2}r$ y $q = s$. Elegimos, por ejemplo, $r = 2$ y $s = 1$, con lo que

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det X = 1 \neq 0.$$

Al ser invertible, sirve para formar la semejanza. De hecho,

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad XAX^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = B.$$

Conclusión. Una matriz que verifica la condición es $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Opción A - Ejercicio 3. Plano y recta en el espacio

La recta r es la intersección de $x + y + 1 = 0$ y $z = 0$. Por tanto, un punto de ella es $P_0 = (0, -1, 0)$ y un vector director es $\vec{d} = (1, -1, 0)$. El plano dado,

$$\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0,$$

tiene vector normal $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

a) El plano pedido pasa por $A = (1, -2, -3)$ y contiene una dirección paralela a r , así que su vector normal debe ser perpendicular a $\vec{d}$. Además, al ser perpendicular a π , su normal debe ser perpendicular a $\vec{n}$. Tomamos el producto vectorial, que proporciona un vector perpendicular a ambos:

$$\vec{n}_1 = \vec{d} \times \vec{n} = (1, -1, 0) \times (1, -2, -3) = (3, 3, -1).$$

Usando este vector normal y el punto A ,

$$3(x-1) + 3(y+2) - (z+3) = 0 \implies 3x + 3y - z = 0.$$

Conclusión. El plano buscado es $3x + 3y - z = 0$.

b) Un punto de r se puede escribir como $Q(t) = (t, -1-t, 0)$. Para que la recta $AQ(t)$ sea paralela a π , su vector director $Q(t) - A$ debe ser perpendicular a la normal $\vec{n}$:

$$Q(t) - A = (t-1, 1-t, 3), \quad (Q(t) - A) \cdot (1, -2, -3) = 0.$$

La condición da $t-1-2(1-t)-9=0$, es decir, $3t-12=0$ y $t=4$. Así,

$$Q = (4, -5, 0), \quad Q - A = (3, -3, 3).$$

Dividiendo este vector por 3, la recta por A queda

$$\ell : (x, y, z) = (1, -2, -3) + \lambda(1, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = 3$ se obtiene precisamente Q , y $(1, -1, 1) \cdot (1, -2, -3) = 0$, por lo que la recta corta a r y es paralela a π . **Conclusión.** La recta pedida es $\ell : (x, y, z) = (1, -2, -3) + \lambda(1, -1, 1)$.

Opción A - Ejercicio 4. Rectas tangentes a una parábola

La función $f(x) = x^2 + m$ es polinómica y está definida para todo real. Su derivada es $f'(x) = 2x$, de modo que la recta tangente en la abscisa a tiene pendiente $2a$ y ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = a^2 + m + 2a(x-a) = 2ax - a^2 + m.$$

a) Para que pase por el origen, sustituimos $(0, 0)$ en la ecuación de la tangente: $0 = -a^2 + m$. Como se pide $a > 0$ y $m > 0$,

$$a^2 = m \implies a = \sqrt{m}.$$

Conclusión. Para cada $m > 0$, la tangente pasa por el origen cuando $a = \sqrt{m}$.

b) La recta $y = x$ tiene pendiente uno. En el punto de tangencia debe cumplirse $f'(a) = 1$, así que $2a = 1$ y $a = \frac{1}{2}$. Además, el punto de la parábola ha de pertenecer a $y = x$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{4} + m = \frac{1}{2} \implies m = \frac{1}{4}.$$

Conclusión. La recta $y = x$ es tangente a la gráfica cuando $m = \frac{1}{4}$.

Opción B - Ejercicio 1. Área encerrada entre una curva y el eje OX

La función es $f(x) = \frac{x^2-12}{x^2+4}$. El denominador siempre es positivo y los puntos de corte con el eje OX se obtienen de $x^2 - 12 = 0$, es decir, $x = \pm 2\sqrt{3}$. Entre esos puntos el numerador es negativo; por tanto, el área es la integral de $-f$ entre las raíces:

$$\mathcal{A} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{12-x^2}{x^2+4} dx.$$

Reescribimos el integrando como $-1 + \frac{16}{x^2+4}$. Una primitiva es $-x + 8 \arctan(x/2)$, pues $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan(x/2)$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[-x + 8 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \\ &= -4\sqrt{3} + 8 \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Opción B - Ejercicio 2. Estudio y gráfica de una función con valor absoluto

La función es $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$. El denominador no puede ser cero, por lo que

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Para derivar y estudiar el signo, separamos según el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2-x}, & x < 0, \\ \frac{x}{2-x}, & x \geq 0, x \neq 2. \end{cases}$$

En los intervalos diferenciables,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(2-x)^2} < 0, & x < 0, \\ \frac{2}{(2-x)^2} > 0, & x > 0, x \neq 2. \end{cases}$$

Así, decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, 2)$ y $(2, +\infty)$. En $x = 0$ alcanza un mínimo, $f(0) = 0$. En $x = 2$ hay una asíntota vertical, pues

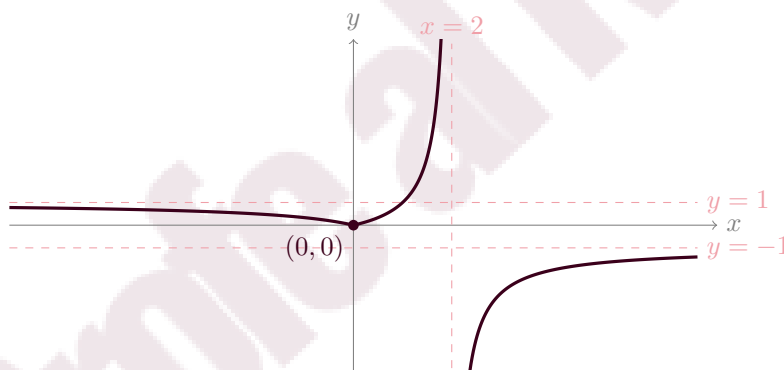
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

Para las asíntotas horizontales dividimos numerador y denominador por x , teniendo en cuenta el signo de x :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

Por tanto, hay asíntotas horizontales $y = 1$ en $-\infty$ y $y = -1$ en $+\infty$.

La gráfica recoge las dos expresiones de la función, el mínimo en el origen y las asíntotas:



Conclusión. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; decrece hasta el mínimo $(0, 0)$ y después crece en cada intervalo del dominio. Las asíntotas son $x = 2$, $y = 1$ en $-\infty$ e $y = -1$ en $+\infty$.

Opción B - Ejercicio 3. Conmutatividad y potencia de matrices

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos por separado los dos productos para imponer la condición $AB = BA$:

$$AB = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igualar las entradas correspondientes resulta $b = c$ y $a = c$; esas dos igualdades hacen coincidir también todas las demás entradas. **Conclusión.** $AB = BA$ exactamente cuando $a = b = c$.

Para $a = b = c = 1$ la matriz es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos las primeras potencias para reconocer el patrón:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En cada nueva multiplicación, el bloque superior $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se duplica, mientras que la entrada inferior permanece igual a uno. Por inducción, para $n \geq 1$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $B^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Opción B - Ejercicio 4. Alineación, triángulo isósceles y plano

Sean $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$. Calculamos dos vectores con origen en A :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, -2, 2).$$

a) Tres puntos están alineados si sus dos vectores con origen en uno de ellos son proporcionales, o equivalentemente si su producto vectorial es nulo. Aquí,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4\lambda - 4, 2\lambda - 4, 2\lambda - 4).$$

Para que se anule la primera coordenada se necesita $\lambda = -1$, mientras que la segunda exige $\lambda = 2$; no pueden cumplirse a la vez. **Conclusión.** No existe ningún valor de λ para el que A, B, C estén alineados.

b) Comparamos las longitudes al cuadrado:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (2 - \lambda)^2 + (-\lambda - 2)^2 + \lambda^2 = 3\lambda^2 + 8, \\ BC^2 &= (2 - \lambda)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 2)^2 = 3\lambda^2 + 8. \end{aligned}$$

Como los puntos nunca están alineados, forman un triángulo no degenerado y las longitudes iguales $AB = BC$ muestran que es isósceles. **Conclusión.** El triángulo es isósceles en B , pues $AB = BC$.

c) Para $\lambda = 0$ los puntos son $A = (0, 2, 0)$, $B = (2, 0, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$. Los vectores $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 2)$ tienen producto vectorial $(-4, -4, -4)$, proporcional a $(1, 1, 1)$. Este es un vector normal del plano. Al usar el punto A obtenemos

$$\pi : x + y + z - 2 = 0.$$

La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Para el origen $O = (0, 0, 0)$,

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Conclusión. El plano del triángulo para $\lambda = 0$ es $x + y + z - 2 = 0$ y su distancia al origen es $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.