

Modelo 4 de 2004

Integrales, tangentes, determinantes, optimización y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

Usamos el cambio indicado $t = 1 + \sqrt{x}$. Entonces $\sqrt{x} = t - 1$, $x = (t - 1)^2$ y $dx = 2(t - 1)dt$. Los extremos pasan de $x = 1$, 9 a $t = 2$, 4:

$$I = \int_2^4 \frac{2(t-1)}{t} dt = 2[t - \ln t]_2^4 = \boxed{2 - 2 \ln 2}.$$

Opción A - Ejercicio 2

(a) La recta dada tiene pendiente 4. La tangente a $y = x^2$ en $x = a$ tiene pendiente $2a$, así que $2a = 4$ y $a = 2$. En el punto $(2, 4)$,

$$y - 4 = 4(x - 2) \implies \boxed{y = 4x - 4}.$$

(b) La tangente en $x = a$ es $y = 2ax - a^2$. Para que pase por $(2, 0)$ se requiere $0 = 4a - a^2$, luego $a = 0$ o $a = 4$. Las tangentes correspondientes son

$$\boxed{y = 0 \quad \text{e} \quad y = 8x - 16}.$$

Opción A - Ejercicio 3

(a) Para una matriz de orden 2, $\det(kA) = k^2 \det A$ y $\det(A^t) = \det A$. Así,

$$\det(-3A^t) = (-3)^2 \det A = \boxed{36}.$$

En el segundo determinante se multiplican las columnas por 2 y -3 , y luego se intercambian. El factor total es $2(-3)(-1) = 6$, por lo que vale $6 \cdot 4 = \boxed{24}$.

(b) De $B^3 = I$ se sigue $(\det B)^3 = \det I = 1$. Como $\det B$ es real, $\boxed{\det B = 1}$.

(c) Tomando determinantes en $C^{-1} = C^t$ se obtiene $1/\det C = \det C$, pues la transpuesta conserva el determinante. Por tanto $(\det C)^2 = 1$ y $\det C = \pm 1$; no puede ser 3. **Opción A - Ejercicio 4**

Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(0, 1, -3), \quad s : (x, y, z) = (1, 0, 1) + u(1, 0, -1).$$

Para rectas alabeadas, la distancia es el valor absoluto de la proyección del vector entre puntos sobre la normal común:

$$d(r, s) = \frac{|(S_0 - R_0) \cdot (d_r \times d_s)|}{|d_r \times d_s|}.$$

Aquí $S_0 - R_0 = (1, -1, -1)$ y $d_r \times d_s = (-1, -3, -1)$, cuyo módulo es $\sqrt{11}$. Así,

$$\boxed{d(r, s) = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función es un polinomio, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos con ordenada 1:

$$-\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + 1 = 1 \iff x = 0 \text{ o } x = 2.$$

La derivada es $f'(x) = -2x/3 + 2/3$. En $x = 0$ es positiva y en $x = 2$ negativa; el punto solicitado es $(2, 1)$ y su tangente tiene pendiente $-2/3$:

$$\boxed{y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)}, \quad \text{es decir } \boxed{y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}}.$$

La región queda entre esta recta y la parábola para $0 \leq x \leq 2$. La recta está encima, porque

$$\left(-\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\right) - f(x) = \frac{(x-2)^2}{3} \geq 0.$$

Por tanto,

$$S = \int_0^2 \frac{(x-2)^2}{3} dx = \boxed{\frac{8}{9}}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Sea $x > 0$ el lado de la base y $h > 0$ la altura. La capacidad de 32 litros equivale a 32000 cm^3 , por lo que $x^2 h = 32000$ y $h = 32000/x^2$. Al ser abierta, se necesita chapa para la base y cuatro caras:

$$S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{128000}{x}.$$

Buscamos el mínimo para $x > 0$:

$$S'(x) = 2x - \frac{128000}{x^2} = 0 \iff x^3 = 64000 \iff x = 40.$$

Como $S''(x) = 2 + 256000/x^3 > 0$, es mínimo. La altura resulta $h = 32000/40^2 = 20$. Las dimensiones son $\boxed{40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}}$.

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$ y $\det A = m(m-2)(m+2)$. Para (a), al sustituir $(0, 1, 0)$ en las tres ecuaciones se obtienen identidades, así que sirve para todo $m \in \mathbb{R}$.

Si $m \notin \{-2, 0, 2\}$, el determinante no es cero y el sistema es SCD. En los casos singulares:

m	relaciones independientes	clasificación
0	$x = 0, \quad 2y + z = 2$	SCI : $(0, t, 2 - 2t)$
2	$x + 2y = 2, \quad z = -x$	SCI : $(t, 1 - t/2, -t)$
-2	$x - 2y = -2, \quad z = x$	SCI : $(t, 1 + t/2, t)$

En cada fila quedan dos ecuaciones independientes para tres incógnitas, y las condiciones son compatibles, por lo que hay infinitas soluciones. No hay valores de m que hagan al sistema incompatible. En particular, los valores pedidos en (c) son $\boxed{m = -2, 0, 2}$.

Opción B - Ejercicio 4

La recta r está contenida en el plano $x + y = 2$ y la recta s en $x + y = 6$. Son paralelas, y la distancia entre estos planos paralelos es

$$d = \frac{|6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Como ambas rectas son lados del cuadrado, esta distancia es el lado; su área es $\boxed{(2\sqrt{2})^2 = 8}$. Ambas rectas tienen $z = 0$, por lo que el plano que las contiene es

$$\boxed{z = 0}.$$