



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La potencia de pérdida $P(t)$ (en vatios) en una máquina, debido a la fricción, depende del tiempo de uso t (en años) según la función $P(t) = \frac{4t}{1+t^2}$ siendo $t \geq 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula en qué momento la potencia de pérdida es máxima.
- b) **[1,25 puntos]** La energía total perdida en los t primeros años viene dada por la expresión $E(t) = \int_0^t P(x) dx$ (vatios por año). Calcula la energía total perdida en los tres primeros años.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Una empresa produce tres tipos de productos, A, B y C. Si el precio del producto A tuviera un 10% de descuento y el de los productos B y C tuviera un 20% de descuento cada uno, la suma de los precios de tres productos, uno de cada tipo, sería 66 €. El precio total sin descuento de 3 productos del tipo A y 4 productos del tipo B es 140 €.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto valdrán 3 productos de tipo A más 8 productos de tipo C?
- b) **[1,25 puntos]** Determina el precio, sin descuento, de cada tipo de producto, sabiendo además que el precio del producto de tipo C es el doble que el de tipo A.

PARTE OPTATIVA**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)**

Considera el plano $\pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla el área del triángulo cuyos vértices están determinados por la intersección de π con los ejes coordenados.
- b) **[1,25 puntos]** Halla los planos paralelos a π que distan 2 unidades del punto $P(2, 2, 1)$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z = 7$, $\pi_2 \equiv x - 2y + z = 3$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos.
- b) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a π_1 y a π_2 .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)**

Determina para qué valores de a el límite

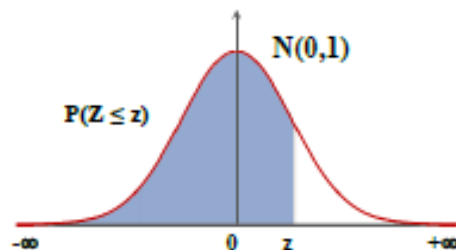
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1 - ax) \cos(2x)}{x^2}$$

vale 6.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Las tallas de las niñas al nacer se distribuyen según una distribución normal de media 50 cm y desviación típica 1,8 cm.

- a) **[1 punto]** Halla la probabilidad de que una niña al nacer mida más de 54 cm.
- b) **[1,5 puntos]** Si en un hospital durante un mes han nacido 100 niñas, ¿cuántas tendrán en el momento del nacimiento una talla entre 48,2 y 51,8 cm?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La potencia de pérdida $P(t)$ (en vatios) en una máquina, debido a la fricción, depende del tiempo de uso t (en años) según la función $P(t) = \frac{4t}{1+t^2}$ siendo $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula en qué momento la potencia de pérdida es máxima.

b) **[1,25 puntos]** La energía total perdida en los t primeros años viene dada por la expresión

$$E(t) = \int_0^t P(x) dx \text{ (vatios por año). Calcula la energía total perdida en los tres primeros años.}$$

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$P(t) = \frac{4t}{1+t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{4(1+t^2) - 4t \cdot (2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{4 + 4t^2 - 8t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4 - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 4(1-t^2) = 0 \Rightarrow 1-t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Como $t \geq 0$ no tenemos en cuenta el valor negativo obtenido. La función tiene un punto crítico en $t = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$P'(0.5) = \frac{4(1-0.5^2)}{(1+0.5^2)^2} = \frac{25}{12} > 0. \text{ La función crece en } [0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$P'(2) = \frac{4(1-2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{-12}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función tiene un máximo relativo y absoluto en $t = 1$. En el año 1 la potencia de pérdida es máxima.

b) Debemos calcular $E(3)$.

$$\begin{aligned} E(3) &= \int_0^3 P(x) dx = \int_0^3 \frac{4x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = 2 \left[\ln(1+x^2) \right]_0^3 = \\ &= 2 \left[\ln(1+3^2) - \ln(1+0^2) \right] = 2 \ln 10 = \boxed{\ln 100 \approx 4.605} \end{aligned}$$

La energía total perdida en los tres primeros años tiene un valor aproximado de 4.605 vatios por año.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Una empresa produce tres tipos de productos, A, B y C. Si el precio del producto A tuviera un 10% de descuento y el de los productos B y C tuviera un 20% de descuento cada uno, la suma de los precios de tres productos, uno de cada tipo, sería 66 €. El precio total sin descuento de 3 productos del tipo A y 4 productos del tipo B es 140 €.

- a) [1,25 puntos] ¿Cuánto valdrán 3 productos de tipo A más 8 productos de tipo C?
 b) [1,25 puntos] Determina el precio, sin descuento, de cada tipo de producto, sabiendo además que el precio del producto de tipo C es el doble que el de tipo A.

a) Llamamos “a”, “b” y “c” al precio de un producto A, B y C, respectivamente.

“Si el precio del producto A tuviera un 10% de descuento y el de los productos B y C tuviera un 20% de descuento cada uno, la suma de los precios de tres productos, uno de cada tipo, sería 66 €” $\rightarrow 0.9 \cdot a + 0.8 \cdot b + 0.8 \cdot c = 66$.

“El precio total sin descuento de 3 productos del tipo A y 4 productos del tipo B es 140 €” $\rightarrow 3a + 4b = 140$.

Tenemos 3 incógnitas y solo tenemos dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.9 \cdot a + 0.8 \cdot b + 0.8 \cdot c = 66 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\}$$

Nos plantean cuánto cuesta $3a + 8c$.

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ \times(-2) \rightarrow -6a - 8b = -280 \\ \hline 3a \quad \quad + 8c = 380 \end{array}$$

3 productos de tipo A más 8 productos de tipo C valen 380 euros.

b) Añadimos una tercera ecuación con la nueva información proporcionada.

“El precio del producto de tipo C es el doble que el de tipo A” $\rightarrow c = 2a$.

Añadimos esta ecuación en el sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ 3a + 4b = 140 \\ c = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8 \cdot 2a = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25a + 8b = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25a + 8b = 660 \\ \times(-2) \rightarrow -6a - 8b = -280 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \hline 19a \quad \quad = 380 \Rightarrow a = \frac{380}{19} = 20 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 2 \cdot 20 = 40 \\ 3 \cdot 20 + 4b = 140 \rightarrow 4b = 80 \Rightarrow b = 20 \end{array} \right. \end{array}$$

Un producto A cuesta 20 €, uno del tipo B cuesta 20 € y uno del tipo C cuesta 40 €.

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla el área del triángulo cuyos vértices están determinados por la intersección de π con los ejes coordenados.
 b) **[1,25 puntos]** Halla los planos paralelos a π que distan 2 unidades del punto $P(2, 2, 1)$.

a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 20 = 0 \Rightarrow 4x = -20 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow A(-5, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 5y + 20 = 0 \Rightarrow 5y = -20 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(0, -4, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -20z + 20 = 0 \Rightarrow 20z = 20 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow C(0, 0, 1)$$

Los vértices del triángulo son $A(-5, 0, 0)$, $B(0, -4, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left. \begin{array}{l} A(-5, 0, 0) \\ B(0, -4, 0) \\ C(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, -4, 0) - (-5, 0, 0) = (5, -4, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (-5, 0, 0) = (5, 0, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4i + 20k - 5j = (-4, -5, 20)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 20^2}}{2} = \boxed{10.5 \text{ u}^2}$$

El área del triángulo formado por los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados tiene un valor de 10.5 unidades cuadradas.

- b) Los planos π' paralelos a π tienen ecuación $\pi' \equiv 4x + 5y - 20z + D = 0$.

Hallamos la distancia del punto P al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 4x + 5y - 20z + D = 0 \\ P(2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi', P) = \frac{|4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 20 \cdot 1 + D|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + (-20)^2}} = \frac{|D - 2|}{21}$$

Averiguamos el valor de D para que la distancia valga 2.

$$d(\pi', P) = 2 \Rightarrow \frac{|D-2|}{21} = 2 \Rightarrow |D-2| = 42 \Rightarrow \begin{cases} D-2 = 42 \rightarrow \boxed{D = 44} \\ D-2 = -42 \rightarrow \boxed{D = -40} \end{cases}$$

Los planos que cumplen lo pedido son $\pi_1 : 4x + 5y - 20z + 44 = 0$ y

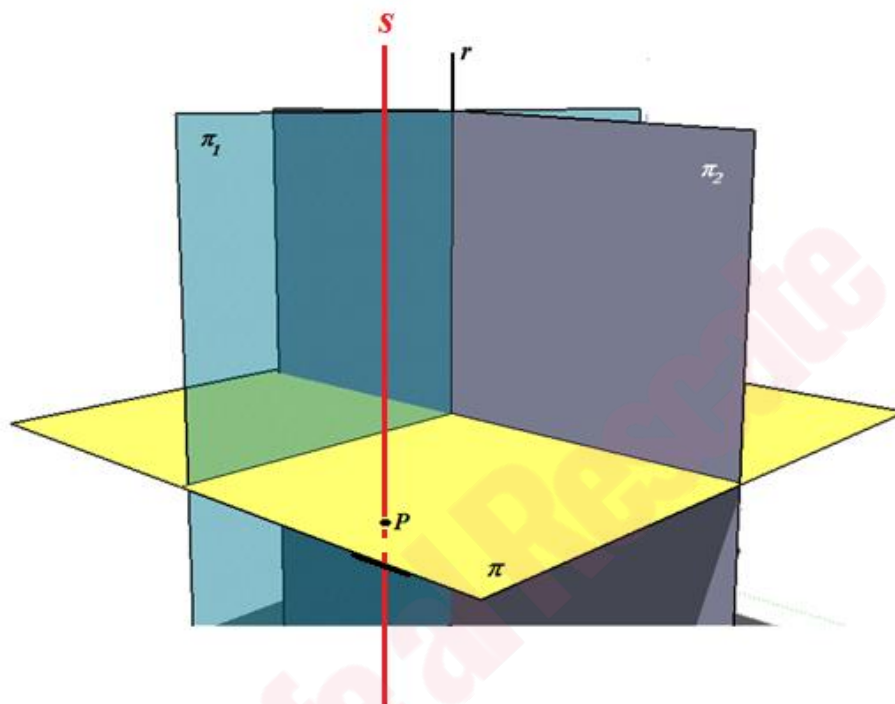
$\pi_2 : 4x + 5y - 20z - 40 = 0$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z = 7$, $\pi_2 \equiv x - 2y + z = 3$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- a) [1,25 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos.
- b) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a π_1 y a π_2 .

a)



Determinamos la posición relativa de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z = 7 \rightarrow \vec{n}_1 = (2, -1, -1) \\ \pi_2 \equiv x - 2y + z = 3 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$$

Como los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales los planos se cortan en una recta. La recta que buscamos debe ser paralela a la recta intersección de los dos planos. Hallamos el vector director de esta recta que será el vector director de la recta que buscamos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z = 7 \\ \pi_2 \equiv x - 2y + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 7 \\ z = 3 - x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - y - 3 + x - 2y = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y = 10 \Rightarrow 3x = 10 + 3y \Rightarrow x = \frac{10}{3} + y \Rightarrow z = 3 - \frac{10}{3} - y + 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1}{3} + y \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{10}{3} + \alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{-1}{3} + \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = (1, 1, 1)}$$

La recta s que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La ecuación de la recta s que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos es

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) El plano π perpendicular a π_1 y a π_2 tiene como vector normal el vector director de la recta r intersección de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x + y + z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D + 2 = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + z - 2 = 0}$$

La ecuación del plano π que pasa por el punto P y es perpendicular a π_1 y a π_2 es

$$\pi: x + y + z - 2 = 0.$$

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Determina para qué valores de a el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1 - ax) \cos(2x)}{x^2}$$

vale 6.

Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1 - ax) \cos(2x)}{x^2} = \frac{e^{-a \cdot 0} - (1 - a \cdot 0) \cos(2 \cdot 0)}{0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ae^{-ax} - [(-a) \cos(2x) + (1 - ax) 2(-\sin(2x))]}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ae^{-ax} + a \cos(2x) + 2(1 - ax) \sin(2x)}{2x} = \frac{-ae^{-a \cdot 0} + a \cos(2 \cdot 0) + 2(1 - a \cdot 0) \sin(2 \cdot 0)}{2 \cdot 0} =$$

$$= \frac{-a + a + 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 e^{-ax} - 2a \sin(2x) - 2a \sin(2x) + 4(1 - ax) \cos(2x)}{2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 e^{-ax} - 4a \sin(2x) + 4(1 - ax) \cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{a^2 e^{-a \cdot 0} - 4a \sin(2 \cdot 0) + 4(1 - a \cdot 0) \cos(2 \cdot 0)}{2} = \boxed{\frac{a^2 + 4}{2}}$$

Averiguamos cuando este límite vale 6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1 - ax) \cos(2x)}{x^2} = 6 \Rightarrow \frac{a^2 + 4}{2} = 6 \Rightarrow a^2 + 4 = 12 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{8}}$$

Para $a = \pm\sqrt{8}$ se cumple que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1 - ax) \cos(2x)}{x^2} = 6$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Las tallas de las niñas al nacer se distribuyen según una distribución normal de media 50 cm y desviación típica 1,8 cm.

- a) [1 punto] Halla la probabilidad de que una niña al nacer mida más de 54 cm.
 b) [1,5 puntos] Si en un hospital durante un mes han nacido 100 niñas, ¿cuántas tendrán en el momento del nacimiento una talla entre 48,2 y 51,8 cm?

- a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da las tallas, en cm, de las niñas al nacer.
 $X = N(50, 1.8)$.

Debemos calcular $P(X > 54)$.

$$P(X > 54) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{1.8} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{54 - 50}{1.8}\right) = P(Z > 2.22) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9868 = 0.0132$$

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9830
2,2	0,9861	0,9864	0,9868

La probabilidad de que una niña al nacer mida más de 54 cm es de 0.0132.

- b) Hallamos la probabilidad de que una niña al nacer tenga una talla entre 48,2 y 51,8 cm.

$$P(48.2 \leq X \leq 51.8) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{1.8} \end{array} \right\} = P\left(\frac{48.2 - 50}{1.8} \leq Z \leq \frac{51.8 - 50}{1.8}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826}$$

z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8150
1,0	0,8413
1,1	0,8643

La probabilidad de que una niña al nacer tenga una talla entre 48,2 y 51,8 cm es de 0.6826. Multiplicamos por 100 y tenemos que de las 100 niñas nacidas serán 68 las que tendrán una talla entre 48,2 y 51,8 cm.