Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2009--2010 · Examen v6

Se resuelven ambas opciones con los procedimientos y justificaciones correspondientes.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones con matrices

Sean

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos primero B^T y luego AB^T:

$$B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 3 \end{pmatrix}, \qquad AB^T=\begin{pmatrix} a+b & 3 \\ 2b & 6 \end{pmatrix}.$$

La igualdad $A-B+AB^T=C$ queda

$$\begin{pmatrix} 2a+b-1 & 4-b \\ 2b & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas, $4-b=3$ da $b=1$, y entonces $2a+b-1=1$ implica $a=\frac{1}{2}$. La entrada inferior izquierda también se verifica, pues $2b=2$.

b) Multiplicamos B por su transpuesta:

$$BB^T=\begin{pmatrix} 1+b^2 & 3b \\ 3b & 9 \end{pmatrix}.$$

La entrada inferior derecha vale siempre 9, así que no puede ser la matriz nula para ningún valor de b.

c) Para $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, la matriz A es invertible porque su determinante es 1. De $AX+B=O$ se deduce $X=-A^{-1}B$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=1; \quad BB^T\neq O \text{ para todo } b; \quad X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad y derivabilidad

a) Función f. En $x=0$, la función toma el valor 2 por el primer tramo. Los límites laterales son

$$\lim_{x\to 0^-}(x^3-x^2+2)=2, \qquad \lim_{x\to 0^+}(-x^3-x^2+2)=2.$$

Por tanto, f es continua. Sus derivadas laterales son

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(3x^2-2x)=0, \qquad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}(-3x^2-2x)=0,$$

por lo que también es derivable en ese punto.

b) Función h. El valor y ambos límites laterales vuelven a ser 2, así que h es continua en cero. Sin embargo,

$$h'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(-2x+1)=1, \qquad h'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}(-2x-1)=-1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, h no es derivable en cero.

c) Perfil. El arco de f llega al punto más alto con tangente horizontal y sin vértice, por lo que representa el perfil redondeado de un túnel. El arco de h presenta un cambio brusco de pendiente en la clave; corresponde al perfil apuntado de una catedral.

$$\boxed{f \text{ es continua y derivable en } 0; \qquad h \text{ es continua, pero no derivable en } 0.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y condicionada

Sean S_1 y S_2 los sucesos «se utiliza el servidor 1» y «se utiliza el servidor 2», y B «se bloquean los ordenadores». Se tiene $P(S_1) = 0{,}45$, $P(S_2) = 0{,}55$, $P(B \mid S_1) = 0{,}05$ y $P(B \mid S_2) = 0{,}08$. **a)** Los dos servidores cubren todos los casos y son incompatibles; sumamos las probabilidades de bloqueo de ambas ramas:

$$P(B) = P(S_1)P(B \mid S_1) + P(S_2)P(B \mid S_2) = 0{,}45 \cdot 0{,}05 + 0{,}55 \cdot 0{,}08 = 0{,}0665.$$

b) Para averiguar qué servidor se estaba usando después de observar el bloqueo, aplicamos Bayes:

$$P(S_1 \mid B) = \frac{P(S_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}05}{0{,}0665} = \frac{45}{133} \approx 0{,}3383.$$

$$\boxed{P(B) = 0{,}0665; \qquad P(S_1 \mid B) = \frac{45}{133} \approx 0{,}3383.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo para una proporción

La proporción muestral de adultos es $\hat{p} = 50/350 = 1/7$, y $\hat{q} = 6/7$. Para un nivel de confianza del 98%, $z_{0{,}99} \approx 2{,}3263$. Usamos

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},$$

con error máximo

$$E = 2{,}3263\sqrt{\frac{(1/7)(6/7)}{350}} \approx 0{,}04351.$$

Así,

$$IC_{98\%}(p) \approx (0{,}14286 - 0{,}04351,\ 0{,}14286 + 0{,}04351) = (0{,}09934,\ 0{,}18637).$$

La proporción $2/15 \approx 0{,}13333$ pertenece al intervalo, por lo que es compatible con los datos al 98% de confianza.

$$\boxed{IC_{98\%}(p) \approx (0{,}09934,\ 0{,}18637); \quad \frac{2}{15} \text{ es compatible.}}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal

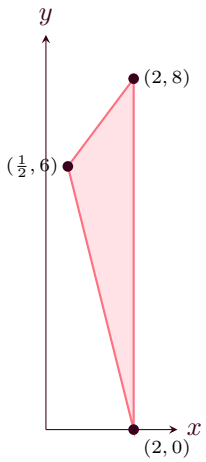
Las desigualdades son $x \le 2$, $y \ge -4x + 8$ y $3y - 4x - 16 \le 0$, es decir,

$$-4x + 8 \le y \le \frac{4x + 16}{3}, \qquad x \le 2.$$

Para que exista un valor de y entre ambas rectas debe cumplirse

$$-4x + 8 \le \frac{4x + 16}{3} \Longrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Las intersecciones de las fronteras que forman el recinto son $(\frac{1}{2}, 6)$, donde se cortan las rectas oblicuas, y $(2, 0), (2, 8)$, donde $x = 2$ las corta.



La función lineal $F(x, y) = 3x - y$ alcanza sus extremos en los vértices:

$$F\left(\frac{1}{2}, 6\right) = -\frac{9}{2}, \qquad F(2, 0) = 6, \qquad F(2, 8) = -2.$$

$$\boxed{F_{\min} = -\frac{9}{2} \text{ en } (\frac{1}{2}, 6); \qquad F_{\max} = 6 \text{ en } (2, 0).}$$

Ejercicio 2 · Beneficio de una empresa

La función $f(x) = -x^2 + 11x - 10$ modela el beneficio en millones de euros. Factorizamos para determinar dónde es no negativa:

$$f(x) = -(x-1)(x-10).$$

La parábola abre hacia abajo, de modo que $f(x) \geq 0$ entre sus raíces: $1 \leq x \leq 10$ millones de euros.
El vértice da el máximo. Su abscisa es $x = -11/(2 \cdot (-1)) = 11/2$, y

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} - 10 = \frac{81}{4} = 20{,}25.$$

Además, $f'(x) = -2x + 11$ es positiva si $x < 11/2$ y negativa si $x > 11/2$. Combinado con el intervalo donde el beneficio es no negativo, la función crece desde 1 hasta el máximo en $11/2$.

$$\boxed{f(x) \geq 0 \text{ si } 1 \leq x \leq 10; \quad f_{\max} = \frac{81}{4} \text{ millones en } x = \frac{11}{2}; \quad \text{crece en } [1, \frac{11}{2}].}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad con dos deportes

Sean F «jugar al fútbol» y A «practicar atletismo». Los datos son $P(F) = 0{,}45$, $P(A) = 0{,}60$ y $P(F \mid A) = 0{,}50$. Primero obtenemos la intersección:

$$P(F \cap A) = P(A)P(F \mid A) = 0{,}60 \cdot 0{,}50 = 0{,}30.$$

a) El 30% practica ambos deportes. **b)** La probabilidad de ninguno es el complementario de la unión:

$$P(F^c \cap A^c) = 1 - P(F \cup A) = 1 - [0{,}45 + 0{,}60 - 0{,}30] = 0{,}25.$$

c) Si el alumno no juega al fútbol, la probabilidad de que practique atletismo es

$$P(A \mid F^c) = \frac{P(A \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{0{,}60 - 0{,}30}{1 - 0{,}45} = \frac{6}{11}.$$

$$\boxed{P(F \cap A) = 0{,}30; \quad P(\text{ninguno}) = 0{,}25; \quad P(A \mid F^c) = \frac{6}{11}.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

Se quiere comprobar si la vida media supera 70 años. Con desviación típica conocida $\sigma = 8{,}9$, planteamos un contraste de cola derecha:

$$H_0 : \mu \leq 70, \qquad H_1 : \mu > 70.$$

La muestra tiene $n = 100$ y $\bar{x} = 71{,}8$. Bajo el valor frontera $\mu_0 = 70$, el estadístico es

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{71{,}8 - 70}{8{,}9/10} \approx 2{,}022.$$

Para $\alpha = 0{,}05$, el valor crítico es $z_{0{,}95} \approx 1{,}645$. Como $2{,}022 > 1{,}645$, rechazamos H_0 y hay evidencia suficiente para afirmar, al 5% de significación, que la vida media supera los 70 años.

$$\boxed{\text{Se rechaza } H_0 \text{ al 5\%; los datos respaldan } \mu > 70 \text{ años.}}$$