

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro real a . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La solución del sistema cuando $a = 2$. (4 puntos)
- Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2 + 2 puntos)

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano

$\pi: x + y + z = 1$ Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, las ecuaciones de:

- El plano que contiene al punto P y a la recta r . (2 puntos)
- La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
- El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P , situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N . Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P ,

cuando $0 \leq x \leq 18$. (3 puntos)

b) El valor de x , con $0 \leq x \leq 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)

c) El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3 , (2,5 puntos)
y el valor de la matriz C^4 . (2,5 puntos)
- b) El valor del determinante de la matriz $(3A')(4A')^T$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)
- c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B^2 = B$. (2 puntos)

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C , (1 punto)
y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O . (2 puntos)
- b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . (3 puntos)
- c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A , B y C , (2 puntos)
y el volumen del tetraedro T . (2 puntos)

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , (2 puntos)
y los extremos relativos de la función f . (1 punto)
- b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)
- c) El área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{x^2 + 1}{x}$, $1 \leq x \leq e$,
el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)