

**PROBLEMA A.1.** Sea el sistema de ecuaciones  $S: \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ x + 14y + \alpha z = 0 \end{cases}$  donde  $\alpha$  es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

- La solución del sistema  $S$  cuando  $\alpha = 0$ . (4 puntos).
- El valor de  $\alpha$  para el que el sistema  $S$  tiene infinitas soluciones. (4 puntos).
- Todas las soluciones del sistema  $S$  cuando se da a  $\alpha$  el valor obtenido en el apartado b). (2 puntos).

*Solución:*

*El sistema  $S$  es homogéneo, por lo tanto es un sistema compatible.*

a) Para  $\alpha = 0$ , el sistema queda:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ x + 14y = 0 \end{cases}$$

Llamando  $A$  a la matriz de coeficientes de este sistema,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 126 + 2 + 30 + 14 + 0 = 46 - 126 = -80 \neq 0$$

Por lo que  $\text{ran}(A) = 3 = n^\circ$  de incógnitas  $\rightarrow$  sistema compatible determinado que por ser homogéneo tendrá como solución la trivial, es decir,  $x = y = z = 0$

**Para  $\alpha = 0$  la solución del sistema  $S$  es  $x = y = z = 0$**

b) Como es un sistema homogéneo, tendrá infinitas soluciones cuando  $|M| = 0$ , siendo  $M$  la matriz de coeficientes del sistema  $S$ .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & \alpha \end{vmatrix} = 10\alpha - 126 + 2 + 30 + 14 + 6\alpha = 46 - 126 = 16\alpha - 80$$

$$16\alpha - 80 = 0; \quad 16\alpha = 80; \quad \alpha = \frac{80}{16} = 5$$

Como el menor de orden 2 de  $M$   $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 + 6 = 16 \neq 0 \rightarrow$  para  $\alpha = 5$ ,

$\text{ran}(M) = 2 < n^\circ$  de incógnitas  $\rightarrow S$  es un sistema compatible indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

**$S$  tiene infinitas soluciones para  $\alpha = 5$**

c) Para  $\alpha = 5$  resolvemos el sistema usando las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo de  $M$  (calculado en el apartado anterior). Usamos la primera y segunda ecuaciones y las incógnitas  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} x - 2y = 3z \\ 3x + 10y = z \end{cases}, \text{ lo podemos resolver por Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & -2 \\ z & 10 \end{vmatrix}}{16} = \frac{30z + 2z}{16} = \frac{32z}{16} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{16} = \frac{z - 9z}{16} = \frac{-8z}{16} = \frac{-z}{2}$$

Finalmente, para  $\alpha = 5$  la solución será: 
$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \frac{-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

Tu Profe al Rescate

**PROBLEMA A.2.** En el espacio se tiene la recta  $r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi: x + mz = 0$ , donde  $m$  es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

- El vector director de la recta  $r$ . (2 puntos).
- El valor de  $m$  para el que la recta  $r$  y el plano  $\pi$  son perpendiculares. (2 puntos).
- El valor de  $m$  para el que la recta  $r$  y el plano  $\pi$  son paralelos. (3 puntos).
- La distancia entre  $r$  y  $\pi$  cuando se da a  $m$  el valor obtenido en el apartado c). (3 puntos).

*Solución:*

a) Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta  $r$ .

Resolvemos el sistema que define a  $r$ .

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$ , podemos usar como incógnitas principales  $x$  e  $y$ . El sistema a resolver

$$\text{será } \begin{cases} x + y = 1 + z \\ x - y = z \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-z-z}{-2} = \frac{1+2z}{2} = \frac{1}{2} + z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{z-1-z}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La ecuación paramétrica de la recta  $r$  es,  $r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ , y el vector director de  $r$ ,  $\vec{v}_r$ , es:

$$\vec{v}_r = (1, 0, 1)$$

b)  $r \perp \pi$  cuando  $\vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi$ , siendo  $\vec{n}_\pi$  el vector perpendicular al plano  $\pi$ .

$$\vec{v}_r = (1, 0, 1) \quad \text{y} \quad \vec{n}_\pi = (1, 0, m)$$

Para que estos vectores sean paralelos:  $\frac{1}{1} = \frac{1}{m} \rightarrow m = 1$

**La recta  $r$  y el plano  $\pi$  son perpendiculares para  $m = 1$**

c)  $r \parallel \pi$  cuando  $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

Deberá cumplirse que  $(1, 0, 1) \cdot (1, 0, m) = 0$ ;  $1 + m = 0$ ;  $m = -1$

**La recta  $r$  y el plano  $\pi$  son paralelos para  $m = -1$**

d) Para  $m = -1$  hay que calcular  $d(r, \pi)$ .

Para  $m = -1$ , el plano  $\pi$  es  $x - z = 0$ . Utilizamos la ecuación paramétrica de  $r$  obtenida en el apartado a).

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \left[ \text{siendo } P_r \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \right] = \frac{\left| \frac{1}{2} - 0 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ u.l.} \approx 0'3536 \text{ u.l.}$$

Tu Profe al Rescate

**PROBLEMA A.3.** Se definen las funciones  $f$  y  $g$  por  $f(x) = -x^2 + 2x$  y  $g(x) = x^2$ .

Obtener **razonadamente**:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. (2 puntos).
- El máximo relativo de la función  $f(x) = -x^2 + 2x$  y el mínimo relativo de  $g(x) = x^2$ . (2 puntos).
- Los puntos de intersección de las curvas  $y = -x^2 + 2x$  e  $y = x^2$ . (2 puntos).
- El área encerrada entre las curvas  $y = -x^2 + 2x$  e  $y = x^2$ , donde en ambas curvas la  $x$  varía entre 0 y 1. (4 puntos).

*Solución:*

$f(x)$  y  $g(x)$  son funciones polinómicas, por lo que su dominio es  $\mathbb{R}$ .

a)  $f(x) = -x^2 + 2x$

$$f'(x) = -2x + 2$$

$$-2x + 2 > 0; \quad -2x > -2; \quad x < 1$$

Por lo tanto:  $f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 1)$  y decreciente en  $(1, +\infty)$

$$g(x) = x^2$$

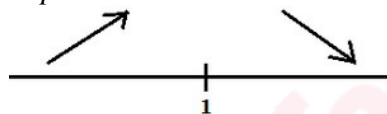
$$g'(x) = 2x$$

$$2x > 0; \quad x > 0$$

Por lo tanto  $g(x)$  es creciente en  $(0, +\infty)$  y decreciente en  $(-\infty, 0)$

b) De lo obtenido en el apartado anterior:

De  $f(x)$  sabemos:

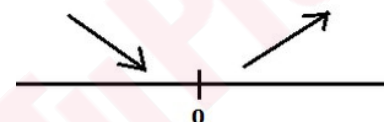


luego  $f(x)$  tiene un máximo relativo en  $x = 1$

$$\text{Para } x = 1, \quad f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

**$f(x)$  tiene un máximo relativo en  $(1, 1)$**

De  $g(x)$  sabemos:



luego  $g(x)$  tiene un mínimo relativo en  $x = 0$

$$\text{Para } x = 0, \quad g(0) = 0^2 = 0$$

**$g(x)$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$**

c) Resolvemos la ecuación:  $-x^2 + 2x = x^2$ ;  $-2x^2 + 2x = 0$ ;  $2x(-x + 1) = 0$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

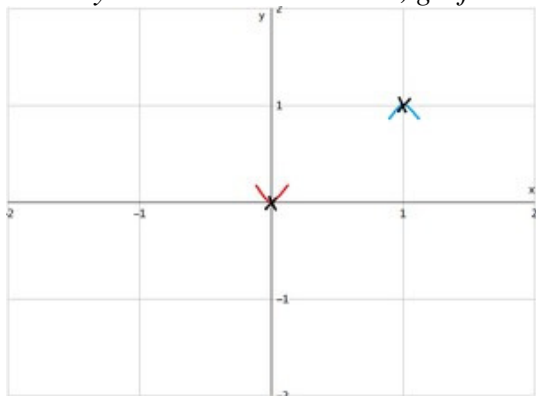
$$\text{Para } x = 0, \quad g(0) = 0^2 = 0$$

$$x = 1, \quad g(1) = 1^2 = 1$$

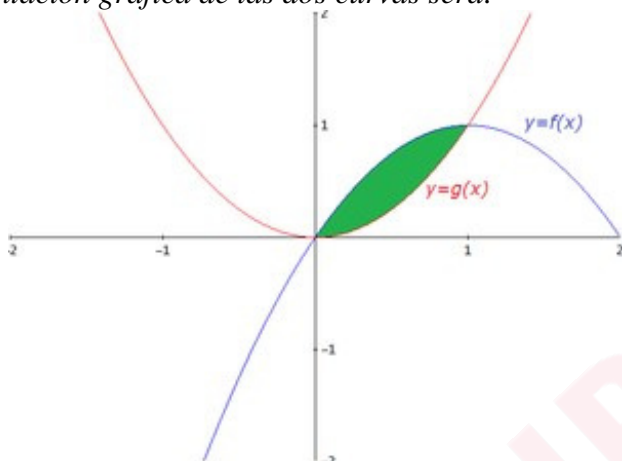
**Los puntos de corte entre las dos curvas indicadas son:  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$**

d) Para calcular el área pedida representamos las dos curvas indicadas.

De lo estudiado en los apartados anteriores de las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  conocemos: los puntos de corte entre ambas y sus extremos relativos, gráficamente:



La representación gráfica de las dos curvas será:



Del enunciado del problema, de la representación gráfica anterior sólo debemos considerar las funciones para valores de  $x$  entre 0 y 1. El área a calcular es la sombreada. Y el cálculo de esta área es:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^1 (-x^2 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \left[ -\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left( -\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1^2 \right) - \left( -\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 0^2 \right) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

El área pedida mide  $\frac{1}{3}$  u.a.

**PROBLEMA B.1.** Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B$ , donde  $B$  es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación  $B^2 = -7B + U$ .

Obtener **razonadamente**:

- Los números reales  $a$  y  $b$  tales que  $A^2 = aA + bU$ . (4 puntos).
- Los números reales  $p$  y  $q$  tales que  $B^{-1} = pB + qU$  (2 puntos), **justificando** que la matriz  $B$  tiene inversa (2 puntos).
- Obtener los valores de  $x$  e  $y$  para los que se verifica que  $B^3 = xB + yU$  (2 puntos).

*Solución:*

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos  $a$  y  $b$  tales que  $A^2 = aA + bU$ , luego:  $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , efectuando operaciones,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ a & a+b \end{pmatrix} \text{ que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones: } \begin{cases} a+b=0 \\ -a=-2 \\ a=2 \\ a+b=0 \end{cases}, \text{ en el que la 1ª y 4ª}$$

ecuación son iguales, así como la 2ª y 3ª, por lo que queda reducido a  $\begin{cases} a+b=0 \\ a=2 \end{cases}$ , sustituyendo el valor de  $a$  en la 1ª ecuación:  $2+b=0$ ;  $b=-2$ .

Los valores de  $a$  y  $b$  buscados son  $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

b) Como  $B^2 = -7B + U$  (en donde  $U$  es la matriz identidad de orden 2)

$$B^2 + 7B = U$$

$B(B + 7U) = U$ , por lo tanto la matriz  $B$  tiene inversa que es  $B + 7U$

Obtengamos  $p$  y  $q$  /  $B^{-1} = pB + qU$

Sabemos que  $B^{-1} = B + 7U$ , por lo que  $p=1$  y  $q=7$

c) Como  $B^2 = -7B + U$

$$B^3 = B^2 \cdot B = (-7B + U) \cdot B = -7B^2 + B = -7(-7B + U) + B = 49B - 7U + B = 50B - 7U$$

Como buscamos  $x$  e  $y$  /  $B^3 = xB + yU$ , será:

$$50B - 7U = xB + yU, \text{ por lo tanto } x=50 \text{ e } y=-7$$

**PROBLEMA B.2.** En el espacio se dan los planos  $\pi$ ,  $\sigma$  y  $\tau$  de ecuaciones:

$$\pi: 2x - y + z = 3; \quad \sigma: x - y + z = 2; \quad \tau: 3x - y - az = b,$$

siendo  $a$  y  $b$  parámetros reales, y la recta  $r$  intersección de los planos  $\pi$  y  $\sigma$ .

Obtener **razonadamente**:

- Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta  $r$ . (3 puntos).
- La ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y pasa por el punto  $(2,1,3)$ . (4 puntos).
- Los valores de  $a$  y de  $b$  para que el plano  $\tau$  contenga a la recta  $r$ , intersección de los planos  $\pi$  y  $\sigma$ . (3 puntos).

*Solución:*

a) La recta  $r$  es la intersección de los planos  $\pi$  y  $\sigma$ , por lo que la ecuación de la recta  $r$  será:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Como  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$ , resolvemos el sistema anterior usando  $x$  e  $y$  como incógnitas principales,

el sistema a resolver será  $\begin{cases} 2x - y = 3 - z \\ x - y = 2 - z \end{cases}$ . Resolviéndolo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3+z+2-z}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4-2z-3+z}{-1} = \frac{1-z}{-1} = -1+z$$

Por lo tanto, la ecuación paramétrica de  $r$  será:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

A partir de esta ecuación conocemos: un punto de  $r$   $P_r(1, -1, 0)$

y su vector director  $\vec{v}_r(0, 1, 1)$

b) Buscamos el plano  $\phi$  que contiene  $\begin{cases} P_r(1, -1, 0) \\ \vec{v}_r(0, 1, 1) \\ Q(2, 1, 3) \end{cases}$

Luego el plano  $\phi$  queda determinado por el punto  $P_r(1, -1, 0)$  y los vectores  $\vec{v}_r$  y  $\overrightarrow{P_rQ}$

$$\overrightarrow{P_rQ} = (2, 1, 3) - (1, -1, 0) = (1, 2, 3)$$

La ecuación del plano  $\phi$  será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(3-2) - (y+1)(-1) + z(-1) = 0$$

$$(x-1) + (y+1) - z = 0$$



$$x - 1 + y + 1 - z = 0$$

$$x + y - z = 0$$

Luego, la ecuación del plano buscado es  $\varphi: x + y - z = 0$

c) Para que  $r \subset \tau$ , cualquier punto de la recta  $r$  verificará la ecuación del plano  $\tau$ . Luego

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 3 \cdot 1 - (-1 + \lambda) - a \lambda = b$$

$$3 + 1 - \lambda - a \lambda = b$$

$$4 - \lambda - a \lambda = b$$

$$\text{Para } \lambda = 0 \rightarrow 4 = b$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \rightarrow 4 - 1 - a = b; \quad 3 - a = b, \text{ sustituyendo el valor de } b \text{ obtenido antes, } 3 - a = 4;$$

$$3 - 4 = a; \quad -1 = a$$

Por lo tanto, el plano  $\tau$  contiene a la recta  $r$  para  $a = -1$  y  $b = 4$

Tu Profe al Rescate

**PROBLEMA B.3.** Se desea construir un depósito cilíndrico de  $100 \text{ m}^3$  de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio  $x$  y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.

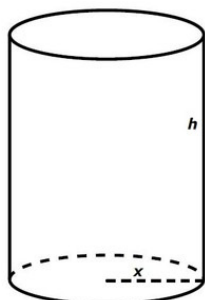
El precio del material de la base del depósito es  $4 \text{ euros/m}^2$ .

El precio del material de la pared vertical es  $2 \text{ euros/m}^2$ .

Obtener **razonadamente**:

- El área de la base en función de su radio  $x$ . (1 punto).
- El área de la pared vertical del cilindro en función de  $x$ . (2 puntos).
- La función  $f(x)$  que da el coste del depósito. (2 puntos).
- El valor  $x$  del radio de la base para que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo. (5 puntos).

Solución:



a) Como la base del cilindro es un círculo, su área será  $A_b = \pi x^2$

b) El área de la pared vertical del cilindro es el área lateral del cilindro:  $A_l = 2 \pi x h$

Para expresar este área en función de  $x$ , utilizamos la condición de que el volumen del depósito debe ser  $100 \text{ m}^3$ .

El volumen del cilindro es:  $V_c = \pi x^2 h$ , por lo tanto  $\pi x^2 h = 100 \rightarrow h = \frac{100}{\pi x^2}$

Y finalmente,  $A_l = 2 \pi x h = 2 \pi x \frac{100}{\pi x^2} = \frac{200}{x}$

c) El coste del depósito será

$$f(x) = 4 \cdot \pi x^2 + 2 \frac{200}{x} = 4 \pi x^2 + \frac{400}{x}$$

Por definición  $x$  es la longitud del radio de la base, luego  $x > 0$

La función que da el coste del depósito es:  $f(x) = 4 \pi x^2 + \frac{400}{x}$ ,  $x > 0$

d) Mínimo de  $f(x)$

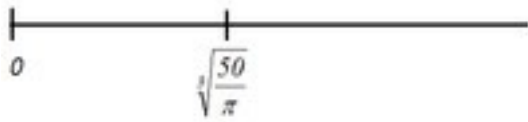
$$f'(x) = 8 \pi x - \frac{400}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 8 \pi x - \frac{400}{x^2} = 0$$

$$8 \pi x^3 - 400 = 0$$

$$8 \pi x^3 = 400 \rightarrow x^3 = \frac{400}{8 \pi} = \frac{50}{\pi} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2,5154$$

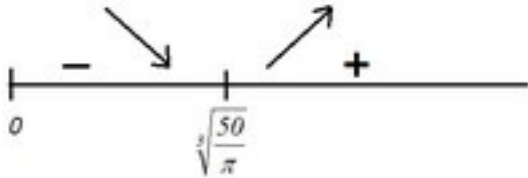
Estudiamos el signo de  $f'(x)$  a la izquierda y derecha de  $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$



$$x = 1, \quad f'(1) = 8\pi - \frac{400}{1^2} = 8\pi - 400 = -397'4535$$

$$x = 3, \quad f'(3) = 8\pi 3 - \frac{400}{3^2} = 30'9538$$

Es decir,



Como a la izquierda de  $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$   $f(x)$  es decreciente y a la derecha creciente, en  $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$   $f(x)$  alcanza su mínimo absoluto.

$$\text{Para } x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \rightarrow f\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2 + \frac{400}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 238'5308 \approx 238'53$$

Para que el coste del depósito sea mínimo, el radio de la base debe medir  $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \text{ m} \approx 2'5154 \text{ m}$  y el coste será de 238'53 €.