

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de coincidencias de 2024

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta A.1 - Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & a & -a \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ a & a & 2 & -8 \end{array} \right).$$

Como el determinante permite saber si el sistema cuadrado tiene solución única, lo calculamos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - 3a) + (2 - 3a) + a(a - 2a) = 10 - 9a - a^2 = -(a + 10)(a - 1).$$

Si $a \neq -10, 1$, entonces $\det A \neq 0$, de modo que $\operatorname{rg}(A) = 3$. Por Rouché-Frobenius, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas: el sistema es compatible determinado.

Para los valores que anulan el determinante, comparamos los rangos de A y A^* .

Caso $a = 1$. Restamos la tercera ecuación de la segunda y restamos dos veces la tercera de la primera. En las columnas de coeficientes queda

$$(0, 1, 1), \quad (0, -3, -3),$$

que son proporcionales; por tanto, $\operatorname{rg}(A) = 2$. En los términos independientes, las mismas operaciones dan 6 y 15, que no guardan esa proporción. La matriz ampliada tiene rango 3. Como los rangos son distintos, el sistema es incompatible.

Caso $a = -10$. La tercera ecuación se puede escribir como $z = 5x + 5y - 4$. Al sustituirla en las dos primeras se obtiene en ambos casos la misma relación independiente:

$$16x + 17y = 10.$$

Por tanto, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado, con un parámetro libre. Tomando $x = t$,

$$y = \frac{10 - 16t}{17}, \quad z = 5t + 5 \left(\frac{10 - 16t}{17} \right) - 4 = \frac{5t - 18}{17}.$$

Conclusión. Es SCD si $a \neq -10, 1$, SI si $a = 1$ y SCI si $a = -10$. Para $a = -10$, las soluciones son $(t, \frac{10-16t}{17}, \frac{5t-18}{17})$, $t \in \mathbb{R}$.

Pregunta A.2 - Función a trozos

a) Continuidad y derivabilidad en $x = 1$

Para decidir la continuidad, comparamos los límites laterales con el valor de la función:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} xe^x = e, \quad f(1) = e + \frac{1 \cdot \ln 1}{1^2 + 1} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} \right) = e.$$

Los tres valores coinciden, así que f es continua en $x = 1$.

Para la derivabilidad, comparamos las derivadas laterales. En el tramo izquierdo,

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x(1 + x) \implies f'_-(1) = 2e.$$

En el derecho,

$$\frac{d}{dx} \left(e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} \right) = \frac{(\ln x + 1)(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2},$$

por lo que $f'_+(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Como las derivadas laterales son distintas, f no es derivable en $x = 1$.

b) Límite cuando $x \rightarrow +\infty$

En este tramo,

$$f(x) = e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1}.$$

Dividimos numerador y denominador de la fracción por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x/x}{1 + 1/x^2} = 0,$$

pues $\ln x/x \rightarrow 0$. Por tanto,

Conclusión. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$.

c) Integral entre 0 y 1

En el intervalo de integración se aplica $f(x) = xe^x$. Integramos por partes, tomando $u = x$ y $dv = e^x dx$:

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x-1)e^x]_0^1 = 1.$$

Conclusión. $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

Pregunta A.3 - Geometría en el espacio

La recta r está definida por $2x - y = 0$ y $x + z = -1$. Tomando $x = t$, queda en forma paramétrica

$$r: \quad x = t, \quad y = 2t, \quad z = -1 - t,$$

con punto $R = (0, 0, -1)$ y vector director $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

a) Posibles coordenadas de C

Como $C \in r$, escribimos $C = (t, 2t, -1 - t)$. El área de un triángulo con lados $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

De los puntos dados,

$$\vec{AB} = B - A = (0, 1, 0) - (-1, 0, 1) = (1, 1, -1),$$

$$\vec{AC} = C - A = (t, 2t, -1 - t) - (-1, 0, 1) = (t + 1, 2t, -2 - t).$$

El área debe ser $\sqrt{2}/2$, así que el módulo del producto vectorial debe ser $\sqrt{2}$. Calculamos

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (t - 2, 1, t - 1),$$

$$(t - 2)^2 + 1 + (t - 1)^2 = 2 \implies 2t^2 - 6t + 4 = 0 \implies (t - 1)(t - 2) = 0.$$

Así, $t = 1$ o $t = 2$, y los dos puntos de la recta que cumplen la condición son **Conclusión.** $C_1 = (1, 2, -2)$ y $C_2 = (2, 4, -3)$.

b) Recta paralela a r por P

Una recta paralela a r debe tener el mismo vector director $(1, 2, -1)$, y ha de pasar por $P = (2, 1, -1)$. Por ello, su forma paramétrica es

$$s: \quad x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta pedida es la anterior.

Pregunta A.4 - Probabilidad

Como B y C son independientes, $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0,3P(B)$. Usamos además la fórmula de la unión:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C).$$

Sustituyendo $P(B \cup C) = 0,73$ y $P(C) = 0,3$,

$$0,73 = P(B) + 0,3 - 0,3P(B) \implies P(B) = \frac{43}{70}.$$

En particular, $P(B \cap C) = \frac{43}{70} \cdot 0,3 = \frac{129}{700}$.

a) Independencia de A y $B \cup C$

Para que estos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C)$. Como $P(A \cup B \cup C) = 1$,

$$1 = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)),$$

de donde

$$P(A \cap (B \cup C)) = 0,5 + 0,73 - 1 = 0,23.$$

En cambio, $P(A)P(B \cup C) = 0,5 \cdot 0,73 = 0,365$. Estos valores no coinciden. **Conclusión.** A y $B \cup C$ no son independientes.

b) Cálculo de $P(B)$ y $P(C \cap (A \cup B))$

La probabilidad de B ya obtenida es $\frac{43}{70}$. Para la segunda, distribuimos la intersección y restamos la parte común que se cuenta dos veces:

$$C \cap (A \cup B) = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

y la intersección de estos dos sucesos es $A \cap B \cap C$. Por inclusión-exclusión,

$$\begin{aligned} P(C \cap (A \cup B)) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= 0,21 + \frac{129}{700} - 0,06 = \frac{117}{350}. \end{aligned}$$

Conclusión. $P(B) = \frac{43}{70}$ y $P(C \cap (A \cup B)) = \frac{117}{350}$.

Pregunta B.1 - Número de tres cifras

Sean x , y y z las cifras de las centenas, decenas y unidades, respectivamente. El número es $100x + 10y + z$, y el que se obtiene al invertir las cifras es $100z + 10y + x$. Traducimos los tres datos:

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ (100x + 10y + z) - 2(100z + 10y + x) = 437, \\ y = \frac{x+z}{2} + 1. \end{cases}$$

La tercera igualdad equivale a $2y = x + z + 2$. Sumándola con la primera,

$$3y = 15 \implies y = 5, \quad x + z = 8.$$

La segunda ecuación se reduce a $98x - 10y - 199z = 437$. Al sustituir $y = 5$ y $z = 8 - x$,

$$98x - 50 - 199(8 - x) = 437 \implies 297x = 2079 \implies x = 7.$$

Por tanto, $z = 1$. Las cifras son válidas y la comprobación da $751 - 2 \cdot 157 = 437$. **Conclusión.** El número buscado es 751.

Pregunta B.2 - Funciones polinómicas

a) Ejemplos con las intersecciones pedidas

Para que un polinomio se anule en ciertos valores, incluimos los factores correspondientes:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)$$

es de grado tres y tiene ceros en 0, 1, 2. Para que sus únicas intersecciones con el eje de abscisas sean 0 y 1, hacemos que uno de esos factores aparezca dos veces:

$$g(x) = x^2(x-1).$$

Sus ceros son exactamente $x = 0$ y $x = 1$. **Conclusión.** Dos ejemplos válidos son $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y $g(x) = x^2(x-1)$.

b) Máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $(1, -1)$

Buscamos un polinomio cúbico cuya derivada se anule en las abscisas 0 y 1. Tomamos

$$f'(x) = kx(x-1), \quad k > 0,$$

porque su signo es positivo antes de 0, negativo entre 0 y 1, y positivo después de 1; así hay máximo en 0 y mínimo en 1. Integramos:

$$f(x) = k \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) + C.$$

La condición $f(0) = 0$ da $C = 0$, y $f(1) = -1$ implica $-k/6 = -1$, luego $k = 6$. Por tanto,

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2.$$

Conclusión. Una función que cumple las condiciones es $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

c) Intersección de una cúbica con el eje de abscisas

Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$. Para x muy grande y positivo, $p(x)$ tiene el signo de a ; para x muy grande y negativo, tiene el signo contrario. Como los polinomios son continuos, el teorema de Bolzano asegura que existe algún valor donde $p(x) = 0$. **Conclusión.** Toda función polinómica real de grado tres corta al eje de abscisas al menos una vez; no puede evitarlo.

Pregunta B.3 - Rectas y planos

La recta r es la intersección de los planos de normales $\vec{n}_1 = (1, 2, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$. Su vector director es perpendicular a ambos:

$$\vec{u}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -1, -1).$$

Un punto de r se obtiene tomando $y = z = 0$, de donde $x = 2$; así, $R = (2, 0, 0)$.

a) Ángulo con el vector normal a $z = 0$

El plano $z = 0$ tiene vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$. El coseno del ángulo agudo entre dos vectores se calcula mediante el producto escalar:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_r| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Conclusión. El ángulo pedido es $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, aproximadamente $72,45^\circ$.

b) Planos que se cortan en r

Todo plano que contiene r puede formarse como combinación lineal de las ecuaciones que definen r . Escribimos

$$F_1 = x + 2y + z - 2 = 0, \quad F_2 = x + y + 2z - 2 = 0.$$

Para que π_1 pase por $P = (1, 2, 3)$, imponemos $6\alpha + 7\beta = 0$, pues $F_1(P) = 6$ y $F_2(P) = 7$. Tomando $(\alpha, \beta) = (7, -6)$,

$$\pi_1 : 7F_1 - 6F_2 = 0 \implies x + 8y - 5z - 2 = 0.$$

Conclusión. El primer plano es $\pi_1 : x + 8y - 5z - 2 = 0$.

Para que π_2 no corte el eje OZ , el coeficiente de z debe ser cero y el término independiente no debe serlo. Tomamos $(\alpha, \beta) = (2, -1)$:

$$\pi_2 : 2F_1 - F_2 = 0 \implies x + 3y - 2 = 0.$$

Conclusión. El segundo plano es $\pi_2 : x + 3y - 2 = 0$.

Al poner $x = y = 0$, esta ecuación queda $-2 = 0$, imposible; por ello el plano no tiene puntos en el eje OZ .

c) Posición relativa de r y s

La recta s debe expresarse en forma paramétrica:

$$s : \quad x = -2 + \lambda, \quad y = 1 - 2\lambda, \quad z = 1 + 3\lambda.$$

Sus vectores directores son $\vec{u}_r = (3, -1, -1)$ y $\vec{u}_s = (1, -2, 3)$, que no son proporcionales. Para decidir si las rectas no paralelas se cortan, comprobamos si son coplanarias. Con $R = (2, 0, 0) \in r$ y $S = (-2, 1, 1) \in s$,

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (-2 - 2, 1 - 0, 1 - 0) = (-4, 1, 1),$$

$$(\vec{u}_r \times \vec{u}_s) \cdot \overrightarrow{RS} = (-5, -10, -5) \cdot (-4, 1, 1) = 5 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo indica que las dos direcciones y el vector que une las rectas no son coplanarios.

Conclusión. r y s son rectas que se cruzan.

Pregunta B.4 - Distribución binomial y aproximación normal

a) Número de procesadores nuevos en un palé

Cada ordenador lleva un procesador nuevo con probabilidad $p = 0,3$, y en un palé hay $n = 10$ ordenadores. Si consideramos independientes las elecciones de procesador, el número X de procesadores nuevos sigue

$$X \sim \text{Binomial}(10, 0,3).$$

En una binomial, la media es $\mu = np$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Luego

$$\mu = 10 \cdot 0,3 = 3, \quad \sigma = \sqrt{10 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{2,1}.$$

La probabilidad de que haya exactamente dos ordenadores con procesador nuevo es

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} (0,3)^2 (0,7)^8 \approx 0,2335.$$

Conclusión. $X \sim \text{Binomial}(10, 0,3)$, $\mu = 3$, $\sigma = \sqrt{2,1}$ y $P(X = 2) \approx 0,2335$.

b) Al menos el 75 % de procesadores antiguos en una tienda

En los 20 palés se reciben $n = 200$ ordenadores. Sea Y el número con procesador antiguo; la probabilidad de que un procesador sea antiguo es 0,7, por lo que $Y \sim \text{Binomial}(200, 0,7)$. La media y desviación típica son

$$\mu = 200 \cdot 0,7 = 140, \quad \sigma = \sqrt{200 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = \sqrt{42}.$$

Aproximamos esta binomial mediante una normal $N(140, \sqrt{42})$. "Al menos el 75 %" significa $Y \geq 150$. Con la corrección de continuidad,

$$P(Y \geq 150) \approx P\left(Z \geq \frac{149,5 - 140}{\sqrt{42}}\right) = P(Z \geq 1,47).$$

La tabla de la normal da $P(Z < 1,47) = 0,9292$, de modo que

$$P(Z \geq 1,47) = 1 - 0,9292 = 0,0708.$$

Conclusión. La probabilidad aproximada es 0,0708, es decir, un 7,08 %.