

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de 2026 - Coincidencias

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Sistemas de ecuaciones

Sean T , F y E los números de touchdowns, field goals y extra points, respectivamente. Como el equipo solo anotó de esas tres formas, sus puntuaciones cumplen

$$6T + 3F + E = 63.$$

Los otros datos se traducen en $T = 2F$ y $T + F = 4E$. Sustituimos $T = 2F$ en la segunda relación: $3F = 4E$. Como los conteos son enteros, podemos escribir $F = 4k$, $E = 3k$ y, por tanto, $T = 8k$. Al sustituir en el total de puntos,

$$6(8k) + 3(4k) + 3k = 63k = 63,$$

de donde $k = 1$. **Conclusión.** El equipo anotó 8 touchdowns, 4 field goals y 3 extra points.

Pregunta 2 - Análisis y áreas

La función está definida en todo $\mathbb{R}$, ya que es el valor absoluto de un polinomio. Escribimos el polinomio interior como

$$g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5).$$

Su signo cambia en $x = 1$ y $x = 5$. Así,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < 1, \\ -g(x), & 1 \leq x \leq 5, \\ g(x), & x > 5. \end{cases}$$

a) Extremos relativos

Derivamos en cada intervalo de la definición:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x < 1, \\ 6 - 2x, & 1 < x < 5, \\ 2x - 6, & x > 5. \end{cases}$$

Para $x < 1$, $2x - 6 < 0$, así que la función decrece. Entre 1 y 3, $6 - 2x > 0$ y crece; entre 3 y 5, $6 - 2x < 0$ y decrece. Para $x > 5$, $2x - 6 > 0$ y vuelve a crecer. En $x = 1$ y $x = 5$ la función no es derivable, pero en ambos puntos vale cero y cambia de decreciente a creciente: son mínimos relativos. En $x = 3$ la derivada cambia de positiva a negativa, así que hay un máximo relativo, cuyo valor es

$$f(3) = |9 - 18 + 5| = 4.$$

Conclusión. Hay mínimos relativos $f(1) = f(5) = 0$ y un máximo relativo en $(3, 4)$.

b) Área entre la gráfica y el eje de abscisas

En $[3, 5]$, $g(x) \leq 0$, por lo que $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$. En $[5, 6]$, $g(x) \geq 0$, de modo que $f(x) = (x - 3)^2 - 4$. Como la función es no negativa, sumamos las integrales de las dos partes:

$$\begin{aligned} A &= \int_3^5 (4 - (x - 3)^2) dx + \int_5^6 ((x - 3)^2 - 4) dx \\ &= \left[4(x - 3) - \frac{(x - 3)^3}{3} \right]_3^5 + \left[\frac{(x - 3)^3}{3} - 4(x - 3) \right]_5^6 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área del recinto es $\frac{23}{3}$ unidades cuadradas.

Pregunta 3 - Geometría en el espacio

La recta r pasa por $A = (1, 2, -5)$ y $B = (2, 4, -11)$. Su vector director se obtiene restando las coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 1, 4 - 2, -11 - (-5)) = (1, 2, -6).$$

Por tanto, la recta r en forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = 1 + u, \\ y = 2 + 2u, \\ z = -5 - 6u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

La intersección de los planos que define s satisface $x - y = 0$, así que $x = y$. Sustituyendo en $x - 2y + 3z = 3$ queda $-x + 3z = 3$. Tomando $z = v$, obtenemos $x = 3v - 3$ y la recta en forma paramétrica

$$s : \begin{cases} x = -3 + 3v, \\ y = -3 + 3v, \\ z = v, \end{cases} \quad v \in \mathbb{R},$$

con vector director $(3, 3, 1)$.

a) Posición relativa de r y s

Los vectores directores $(1, 2, -6)$ y $(3, 3, 1)$ no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas. Comprobamos si se cortan igualando sus coordenadas:

$$\begin{cases} 1 + u = -3 + 3v, \\ 2 + 2u = -3 + 3v, \\ -5 - 6u = v. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda se obtiene $1 + u = 0$, luego $u = -1$. Al sustituir en la primera, $v = 1$. La tercera ecuación también se verifica: $-5 - 6(-1) = 1 = v$. Por tanto, las rectas se cortan en $r(-1) = (0, 0, 1)$.

Conclusión. r y s son secantes y se cortan en $(0, 0, 1)$.

b1) Distancia entre s y t

La recta t pasa por $C = (1, 0, 0)$ y es paralela a s , de modo que ambas tienen vector director $\vec{v} = (3, 3, 1)$. En forma paramétrica, t queda

$$t : \begin{cases} x = 1 + 3w, \\ y = 3w, \\ z = w, \end{cases} \quad w \in \mathbb{R}.$$

Tomamos $P_s = (-3, -3, 0)$, que corresponde a $v = 0$ y pertenece a s . Para dos rectas paralelas, la distancia se calcula con

$$d(s, t) = \frac{\|\overrightarrow{P_s C} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Aquí, $\overrightarrow{P_s C} = C - P_s = (1 - (-3), 0 - (-3), 0 - 0) = (4, 3, 0)$ y

$$\overrightarrow{P_s C} \times \vec{v} = (4, 3, 0) \times (3, 3, 1) = (3, -4, 3), \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{19}.$$

Por tanto,

$$d(s, t) = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 3^2}}{\sqrt{19}} = \sqrt{\frac{34}{19}}.$$

Conclusión. La distancia entre las rectas es $\sqrt{\frac{34}{19}}$.

b2) Coseno del ángulo entre r y s

Usamos los vectores directores $\vec{u} = (1, 2, -6)$ de r y $\vec{v} = (3, 3, 1)$ de s . El coseno del ángulo agudo entre las rectas es el valor absoluto del producto escalar dividido por el producto de los módulos:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{|3 + 6 - 6|}{\sqrt{41} \sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{779}}.$$

Conclusión. El coseno del ángulo entre r y s es $\frac{3}{\sqrt{779}}$.

Pregunta 4 - Probabilidad

4.1 a) Cálculo de $P(B)$

La probabilidad condicionada relaciona la intersección con el suceso condicionante:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Así,

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A) = 0,375 \cdot 0,6 = 0,225.$$

Por la fórmula de la unión, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Despejamos $P(B)$:

$$P(B) = 0,75 - 0,6 + 0,225 = 0,375.$$

Conclusión. $P(B) = 0,375 = \frac{3}{8}$.

4.1 b) Probabilidad de A condicionada a B

Para calcular la probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B , usamos la definición de probabilidad condicionada. El numerador es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos, calculada en el apartado anterior:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,225}{0,375} = 0,6.$$

Conclusión. $P(A | B) = 0,6 = \frac{3}{5}$.

4.2 a) Como máximo un hogar clasifica mal

La probabilidad de que un hogar clasifique mal es $p = 1 - 0,825 = 0,175$, y la de que lo haga bien es $q = 0,825$. Sea X el número de hogares, entre los diez analizados, que clasifican mal. Al tratarse de diez ensayos independientes con probabilidad de error constante,

$$X \sim \text{Binomial}(10, 0,175).$$

«Como máximo uno» significa $X \leq 1$. Sumamos los casos $X = 0$ y $X = 1$:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= \binom{10}{0} q^{10} + \binom{10}{1} p q^9 \\ &= 0,825^{10} + 10 \cdot 0,175 \cdot 0,825^9 \\ &\approx 0,4559. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente 0,4559.

4.2 b) Probabilidad de no ser sancionados

Sea Y el número de hogares, entre los 200 de la muestra, que clasifican mal. Entonces $Y \sim \text{Binomial}(200, 0,175)$. El barrio no se sanciona si el número de errores es menor que el 10 % de 200, es decir, si $Y < 20$ o $Y \leq 19$. Como $np = 35$ y $n(1 - p) = 165$ son suficientemente grandes, la aproximamos mediante una normal de parámetros

$$\mu = np = 35, \quad \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{28,875} \approx 5,374.$$

Aplicamos la corrección de continuidad: $P(Y \leq 19) \approx P(N \leq 19,5)$. Al tipificar,

$$P(Y \leq 19) \approx \Phi\left(\frac{19,5 - 35}{5,374}\right) = \Phi(-2,88) = 1 - \Phi(2,88) \approx 1 - 0,9980 = 0,0020.$$

Conclusión. La probabilidad aproximada de que no se sancione al barrio es 0,0020, aproximadamente un 0,20 %.

Pregunta 5 - Tangentes y límites

5.1 a) Tangencia a $y = x - 1$

Para que la recta y la gráfica sean tangentes, la ecuación de intersección debe tener una raíz doble. Igualamos $f(x) = x - 1$:

$$x^2 + bx = x - 1 \iff x^2 + (b - 1)x + 1 = 0.$$

La condición de raíz doble es que el discriminante sea cero:

$$(b - 1)^2 - 4 = 0 \implies b - 1 = \pm 2 \implies b = -1 \text{ o } b = 3.$$

Para $b = -1$ la raíz doble es $x = 1$; para $b = 3$, es $x = -1$. En cada caso, $f'(x) = 2x + b = 1$, que coincide con la pendiente de la recta. **Conclusión.** Los valores buscados son $b = -1$ y $b = 3$.

5.1 b) Tangente paralela para cualquier b

Una recta paralela a $y = x - 1$ debe tener pendiente 1. Como $f'(x) = 2x + b$, buscamos dónde la derivada vale uno:

$$2x + b = 1 \implies x = \frac{1 - b}{2}.$$

Este valor es real para todo $b \in \mathbb{R}$, así que la gráfica siempre tiene un punto cuya tangente tiene pendiente uno. **Conclusión.** Sí, existe una tangente paralela para todo valor real de b .

5.2 a) Límite con una raíz

Racionalizamos la diferencia para evitar restar dos cantidades grandes:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión. El límite es $\frac{3}{2}$.

5.2 b) Límite de cociente exponencial y logarítmico

Usamos los límites notables $\lim_{u \rightarrow 0} (e^u - 1)/u = 1$ y $\lim_{v \rightarrow 0} \ln(1 + v)/v = 1$. Reescribimos el cociente introduciendo los argumentos $3x$ y $2x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)/(3x)}{\ln(1 + 2x)/(2x)} \cdot \frac{3x}{2x} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión. El límite vale $\frac{3}{2}$.