

Junio de 2025 · Convocatoria ordinaria

Esta solución desarrolla los dos apartados opcionales de Álgebra y de Geometría para que puedas estudiar cualquiera de las alternativas. En el examen debes contestar solo a la opción que se indica en cada pregunta.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

1.1 · Probabilidad de pedir pepperoni

Qué se pregunta. Se elige un cliente al azar y queremos saber la probabilidad de que haya pedido pizza pepperoni.

Datos y regla. Las tres opciones son margarita (M), vegetariana (V) y pepperoni (Pe). Sus probabilidades deben sumar 1. Como el 40 % prefiere M y el 25 % prefiere V, la probabilidad restante corresponde a Pe:

$$P(\text{Pe}) = 1 - P(\text{M}) - P(\text{V}) = 1 - 0.40 - 0.25 = 0.35.$$

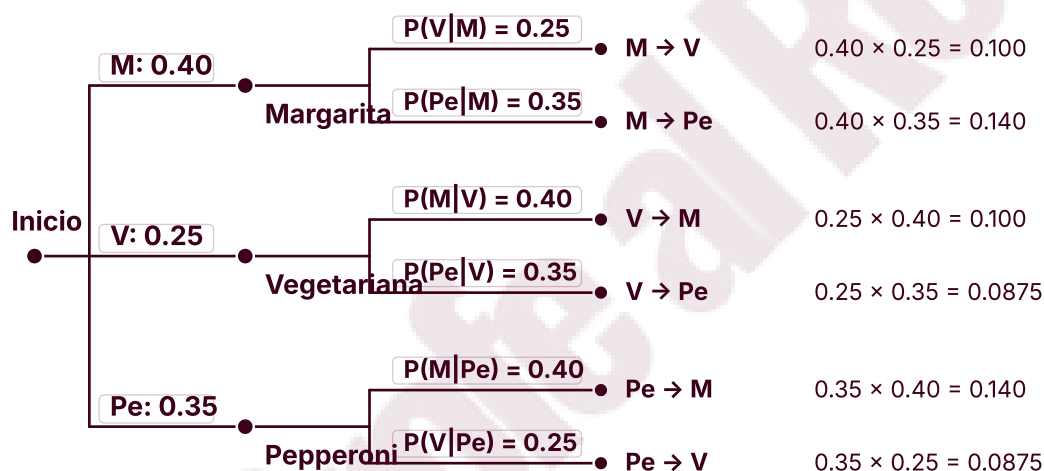
Conclusión. La probabilidad de que el cliente elegido pida pepperoni es **0.35**, es decir, un **35 %**.

1.2 · Probabilidad de que dos clientes pidan tipos distintos

Qué se pregunta. Se eligen dos clientes. Queremos que el segundo haya pedido una pizza distinta de la del primero.

Idea sencilla. Organizamos las posibilidades en un árbol. En cada camino, la probabilidad de llegar a esa pareja de pedidos se obtiene multiplicando las probabilidades de sus dos ramas. Las seis parejas ordenadas son incompatibles entre sí; por eso, al final sumamos sus probabilidades.

Tomamos $P(\text{M}) = \frac{2}{5}$, $P(\text{V}) = \frac{1}{4}$ y $P(\text{Pe}) = \frac{7}{20}$. Las elecciones de dos clientes se consideran independientes: las probabilidades del segundo cliente no cambian según lo que pidió el primero.



Por ejemplo, la rama «primero margarita y después vegetariana» termina en la probabilidad conjunta $0.40 \cdot 0.25 = 0.10$. Sumamos los seis caminos porque no pueden ocurrir a la vez:

$$\begin{aligned} P(\text{distintos}) &= P(\text{M} \cap \text{V}) + P(\text{M} \cap \text{Pe}) + P(\text{V} \cap \text{M}) + P(\text{V} \cap \text{Pe}) \\ &\quad + P(\text{Pe} \cap \text{M}) + P(\text{Pe} \cap \text{V}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{2}{5} + \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{131}{200} = 0.655. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que los dos clientes pidan tipos distintos es $\frac{131}{200} = 0.655$, es decir, un **65.5 %**.

1.3 · Exactamente 4 pizzas margarita entre 10 clientes

Qué se pregunta. De 10 clientes, queremos que exactamente 4 pidan margarita. Cada cliente la pide con probabilidad $p = 0.40$, y no la pide con probabilidad $1 - p = 0.60$.

Modelo. El número X de clientes que piden margarita sigue una distribución binomial:

$$X \sim B(10, 0.40), P(X = k) = \binom{10}{k} (0.40)^k (0.60)^{10-k}.$$

Sustituimos $k = 4$:

$$\begin{aligned}
 P(X=4) &= \binom{10}{4} (0.40)^4 (0.60)^6 \\
 &= 210 \cdot 0.0256 \cdot 0.046656 \\
 &= 0.250822656 \approx 0.2508.
 \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad pedida es aproximadamente **0.2508**, un **25.08 %**.

1.4 · Al menos una pizza margarita entre 10 clientes

Qué se pregunta. «Al menos una» significa 1, 2, ..., 10 clientes. Es más sencillo calcular primero el suceso contrario: que ninguno pida margarita.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - \binom{10}{0} (0.40)^0 (0.60)^{10} \\
 &= 1 - (0.60)^{10} \\
 &= \frac{9706576}{9765625} = 0.9939533824 \approx 0.9940.
 \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que al menos un cliente pida margarita es aproximadamente **0.9940**, un **99.40 %**.

Pregunta 2 · Álgebra

El examen ofrece dos alternativas. Se desarrollan ambas a continuación.

2.1 · Matriz dependiente del parámetro α

La matriz del enunciado es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

2.1.1 · Idempotencia

Qué se pregunta. Una matriz es idempotente cuando $A^2 = A$. Calculamos primero su cuadrado mediante la regla del producto de matrices: cada entrada es el producto escalar de una fila de A por una columna de A .

$$\begin{aligned}
 A^2 &= A \cdot A \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Igualamos las entradas correspondientes de A^2 y A :

$$\begin{cases} \alpha + \alpha^2 = \alpha, \\ \alpha^2 = \alpha, \\ (1 - \alpha)^2 = 1 - \alpha. \end{cases}$$

La primera igualdad da $\alpha^2 = 0$, así que necesariamente $\alpha = 0$. Las otras dos ecuaciones, por separado, dan $\alpha \in \{0, 1\}$; al exigir que se cumplan las tres a la vez, la única solución común es $\alpha = 0$.

Conclusión. La matriz es idempotente únicamente para $\boxed{\alpha = 0}$.

2.1.2 · Inversa de A

Qué se pregunta. Una matriz cuadrada tiene inversa exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Como A es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal:

$$\begin{aligned}
 \det A &= 1 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha). \\
 \det A \neq 0 &\iff \alpha \neq 0 \text{ y } \alpha \neq 1.
 \end{aligned}$$

Para esos valores, proponemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Comprobamos el resultado multiplicando:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha) \cdot \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix} = I_3.$$

Conclusión. La inversa existe para $\alpha \neq 0, 1$ y es la matriz indicada.

2.2 · Discusión de un sistema con parámetro α

El sistema es

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0, \\ 2x + \alpha y - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

Para aplicar Rouché–Frobenius, escribimos la matriz de coeficientes A y la ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & \alpha & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & \alpha & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

2.2.1 · Discusión según α

Como A es cuadrada de orden 3, calculamos su determinante. Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \begin{vmatrix} \alpha & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(2\alpha + 5) + 2(4 + 5) - 3(2 - \alpha) \\ &= 9\alpha + 27 = 9(\alpha + 3). \end{aligned}$$

Caso 1: $\alpha \neq -3$. Entonces $\det A \neq 0$, de modo que $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, por lo que su rango no puede superar 3; además contiene a A , así que $\text{rg}(A^*) = 3$. Por tanto,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

El sistema es **compatible determinado (SCD)**: tiene una única solución.

Caso 2: $\alpha = -3$. El determinante se anula y debemos calcular los rangos, no concluirlos solo a partir del determinante. En A , el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3) - (-2)(2) = -5 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) \geq 2$. Como $\det A = 0$, el rango no es 3; por ello $\text{rg}(A) = 2$.

Para la ampliada, al sustituir $\alpha = -3$, sus filas cumplen

$$F_1 - F_2 = (1, 1, 2 \mid 3) = F_3.$$

Las tres filas son dependientes, así que $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El mismo menor no nulo de orden 2 aparece en A^* , luego $\text{rg}(A^*) \geq 2$ y, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$. Concluimos:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3.$$

El sistema es **compatible indeterminado (SCI)**: tiene infinitas soluciones.

Conclusión de la discusión. Si $\alpha \neq -3$, el sistema es SCD. Si $\alpha = -3$, es SCI. No aparece ningún caso incompatible.

2.2.2 · Soluciones cuando el sistema es SCI

El caso SCI es $\alpha = -3$. Tomamos $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$, y usamos la primera y la tercera ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3t = 0, \\ x + y + 2t = 3. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $x = 3 - y - 2t$. Sustituimos en la primera:

$$3(3 - y - 2t) - 2y - 3t = 0 \implies 9 - 5y - 9t = 0 \implies y = \frac{9 - 9t}{5}.$$

Entonces

$$x = 3 - \frac{9 - 9t}{5} - 2t = \frac{6 - t}{5}.$$

La segunda ecuación del sistema también se cumple: para $a = -3$, su lado izquierdo es $2x - 3y - 5t = -3$, al sustituir estos valores.

Conclusión. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = \left(\frac{6 - t}{5}, \frac{9 - 9t}{5}, t \right), t \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 · Solución para $a = 0$

Como $0 \neq -3$, el sistema es SCD y tiene una sola solución. Sustituimos $a = 0$:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0, \\ 2x - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $x = \frac{-3 + 5z}{2}$. De la tercera,

$$y = 3 - x - 2z = \frac{9 - 9z}{2}.$$

Sustituimos ambas expresiones en la primera:

$$3 \left(\frac{-3 + 5z}{2} \right) - 2 \left(\frac{9 - 9z}{2} \right) - 3z = 0 \implies \frac{27z - 27}{2} = 0 \implies z = 1.$$

Por consiguiente, $x = 1$ e $y = 0$.

Conclusión. Para $a = 0$, la solución única es $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

Pregunta 3 · Geometría

El examen pide elegir entre 3.1 y 3.2. Aquí se explican ambas alternativas. Las rectas se escriben en forma paramétrica y los planos en forma general.

3.1 · Intersección de rectas y plano que las contiene

La primera recta es

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 2 - \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

La segunda viene dada como intersección de dos planos: $x = -1$ y $x + 2y + z = 0$. Para pasarla a forma paramétrica, tomamos $y = \mu$. Entonces $-1 + 2\mu + z = 0$, de donde $z = 1 - 2\mu$:

$$s : \begin{cases} x = -1, \\ y = \mu, \\ z = 1 - 2\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R}.$$

3.1.1 · Punto de corte

Iguamos las coordenadas de ambas rectas. La coordenada x da $1 + 2\lambda = -1$, luego $\lambda = -1$. La coordenada y exige $\mu = \lambda = -1$. Comprobamos la coordenada z :

$$z_r = 2 - (-1) = 3, \quad z_s = 1 - 2(-1) = 3.$$

Las tres coordenadas coinciden.

Conclusión. Las rectas se cortan en $Q = (-1, -1, 3)$.

3.1.2 · Plano que contiene las dos rectas

Los vectores directores, leídos de los coeficientes del parámetro, son

$$\vec{v}_r = (2, 1, -1), \vec{v}_s = (0, 1, -2).$$

Un vector normal al plano es el producto vectorial de esos dos vectores:

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 4, 2).$$

La ecuación de un plano con normal (A, B, C) que pasa por $Q(x_0, y_0, z_0)$ es

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Sustituimos $\vec{n} = (-1, 4, 2)$ y $Q = (-1, -1, 3)$:

$$-(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \iff \boxed{\pi : x - 4y - 2z + 3 = 0}.$$

Comprobación. Al sustituir las coordenadas de r en la ecuación general:

$$(1 + 2\lambda) - 4\lambda - 2(2 - \lambda) + 3 = 0.$$

Se obtiene una identidad. La recta s también está contenida: $-1 - 4\mu - 2(1 - 2\mu) + 3 = 0$. Por tanto, el plano contiene ambas rectas.

3.1.3 · Distancia de $P = (1, 0, 2)$ al plano

Para $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia desde $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Con $\pi : x - 4y - 2z + 3 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0.$$

Conclusión. P pertenece al plano y la distancia pedida es $\boxed{0}$.

3.2 · Planos perpendiculares, distancia y simetría

El plano del enunciado es

$$\pi : 3x - y + 2z - 4 = 0,$$

con vector normal $\vec{n}_\pi = (3, -1, 2)$. Los puntos son $P = (-1, 0, 1)$ y $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.1 · Plano perpendicular a π que pasa por P y Q

El vector $\vec{PQ} = Q - P = (3, 1, 1)$ está contenido en el plano buscado. Su vector normal debe ser perpendicular tanto a $\vec{PQ}$ como a $\vec{n}_\pi$, así que calculamos

$$\vec{n}_\sigma = \vec{n}_\pi \times \vec{PQ} = (3, -1, 2) \times (3, 1, 1) = (-3, 3, 6).$$

Podemos simplificar el normal dividiendo entre 3: $(-1, 1, 2)$. Aplicamos la ecuación punto-normal usando $P = (-1, 0, 1)$:

$$-(x + 1) + y + 2(z - 1) = 0 \iff \boxed{\sigma : x - y - 2z + 3 = 0}.$$

3.2.2 · Distancia de Q a π

Aplicamos la fórmula de distancia punto-plano:

$$d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} \approx 1.3363.$$

La distancia se expresa en unidades de longitud, las mismas usadas para las coordenadas.

3.2.3 · Punto simétrico de P respecto de π

La reflexión se obtiene avanzando desde P el doble de su distancia con signo en la dirección normal. Si el plano es $\vec{n} \cdot X + D = 0$, entonces

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n} \cdot P + D}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $\vec{n} = (3, -1, 2)$, $D = -4$, $\vec{n} \cdot P + D = 3(-1) - 0 + 2(1) - 4 = -5$ y $\|\vec{n}\|^2 = 14$. Sustituimos:

$$\begin{aligned} P' &= (-1, 0, 1) - 2 \frac{-5}{14} (3, -1, 2) \\ &= (-1, 0, 1) + \frac{5}{7} (3, -1, 2) \\ &= \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7} \right). \end{aligned}$$

Comprobación. El punto medio entre P y P' es $M = (1/14, -5/14, 12/7)$, y $3(1/14) - (-5/14) + 2(12/7) - 4 = 0$; por tanto, $M \in \pi$, como debe ocurrir en una simetría respecto de un plano.

Pregunta 4 · Análisis

4.1 · Coste mínimo de una caja

Sea x el lado de la base cuadrada y h la altura, ambos en centímetros. Como son longitudes, $x > 0$ e $h > 0$. El volumen de un prisma de base cuadrada es $V = x^2 h$. Usamos el dato $V = 80 \text{ cm}^3$:

$$x^2 h = 80 \implies h = \frac{80}{x^2}.$$

4.1.1 · Función del precio

El área de las cuatro paredes es $4xh$; cada centímetro cuadrado de esas paredes cuesta 1 céntimo. La base y la tapa suman $2x^2 \text{ cm}^2$, y su material cuesta un 25 % más: $1 \times 1.25 = 1.25$ céntimos/cm².

Por tanto, el precio, medido en céntimos, es

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \cdot 4xh + 1.25 \cdot 2x^2 \\ &= 4x \left(\frac{80}{x^2} \right) + 2.5x^2 \\ &= \frac{320}{x} + \frac{5}{2}x^2, \quad x > 0. \end{aligned}$$

4.1.2 · Dimensiones de coste mínimo

Derivamos la función del coste: $P'(x) = -320/x^2 + 5x$.

Buscamos los puntos críticos dentro del dominio:

$$P'(x) = 0 \iff -\frac{320}{x^2} + 5x = 0 \iff 5x^3 = 320 \iff x^3 = 64 \iff x = 4 \text{ cm}.$$

Comprobamos el signo de la derivada con un valor a cada lado: $P'(3) = -185/9 < 0$ y $P'(5) = 61/5 > 0$.

A la izquierda de $x=4$: probamos $x=3$. Como $P'(3) = -185/9 < 0$, el coste decrece en $(0, 4)$.

En $x=4$: $P'(4) = 0$ y el signo cambia de negativo a positivo; por tanto, hay un mínimo.

A la derecha de $x=4$: probamos $x=5$. Como $P'(5) = 61/5 > 0$, el coste crece en $(4, +\infty)$.

Además, $P(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow +\infty$. Por eso, el mínimo hallado es absoluto.

Comprobación de asíntotas. El dominio es $(0, +\infty)$. En su extremo $x=0$, $P(x) \rightarrow +\infty$, así que $x=0$ es una asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $P(x) \rightarrow +\infty$, luego no hay asíntota horizontal. Para una posible oblicua, la pendiente tendría que ser finita:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{320}{x^2} + \frac{5}{2}x \right) = +\infty.$$

El límite no es finito, por lo que no existe asíntota oblicua.

La altura correspondiente a $x=4$ es $h=80/4^2=5 \text{ cm}$.

Conclusión. El precio mínimo se obtiene con base cuadrada de lado 4 cm y altura 5 cm.

4.1.3 · Precio mínimo

Calculamos cada coste por separado. Las cuatro paredes suman $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80 \text{ cm}^2$, así que cuestan 80 céntimos. La base y la tapa suman $2 \cdot 4^2 = 32 \text{ cm}^2$; a 1.25 céntimos por cm² cuestan $32 \cdot 1.25 = 40$ céntimos.

Por tanto, el precio mínimo es $80+40=120$ céntimos, es decir, 1.20 €.

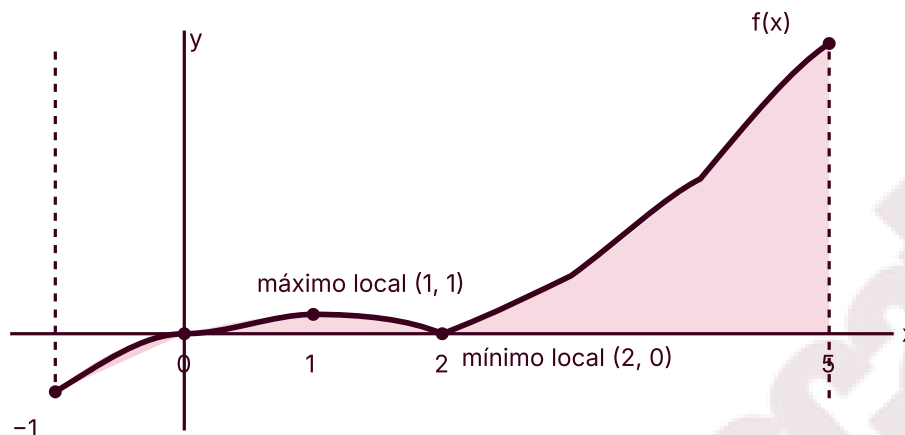
4.2 · Gráfica y área de $f(x)=x|x-2|$

Dominio. El valor absoluto $|x-2|$ existe para cualquier número real y multiplicarlo por x no impone ninguna restricción. Por tanto, el dominio de f son todos los números reales ($\mathbb{R}$).

Para representar la función, separamos los casos del valor absoluto:

Si $x \leq 2$, entonces $|x-2|=2-x$, así que $f(x)=x(2-x)=2x-x^2$. Si $x \geq 2$, entonces $|x-2|=x-2$, así que $f(x)=x(x-2)=x^2-2x$.

Las dos expresiones coinciden en $x=2$, donde $f(2)=0$. Los cortes con el eje OX se obtienen resolviendo $f(x)=0$: las soluciones son $x=0$ y $x=2$.



Crecimiento y extremos. En cada tramo derivamos la expresión correspondiente:

Para $x < 2$, derivamos $2x-x^2$ y obtenemos $f'(x)=2-2x$. Para $x > 2$, derivamos x^2-2x y obtenemos $f'(x)=2x-2$.

En $x=2$, la derivada no existe: la derivada lateral izquierda vale -2 y la derecha vale 2 . En el primer tramo, $2-2x=0$ da $x=1$; en el segundo no hay ceros de la derivada dentro del intervalo $(2, +\infty)$.

Antes de $x=1$: probamos $x=0$. Como $f'(0)=2>0$, la función crece en $(-\infty, 1)$.

En $x=1$: $f'(1)=0$ y el signo cambia de positivo a negativo; hay un máximo local, $f(1)=1$.

Entre $x=1$ y $x=2$: probamos $x=1.5$. Como $f'(1.5)=-1<0$, la función decrece en $(1, 2)$.

En $x=2$: la función no es derivable. La derivada lateral pasa de -2 a 2 , así que hay un mínimo local; $f(2)=0$.

Después de $x=2$: probamos $x=3$. Como $f'(3)=4>0$, la función crece en $(2, +\infty)$.

Así, hay un máximo local en $(1, 1)$ y un mínimo local en $(2, 0)$. No son extremos absolutos en todo $\mathbb{R}$: cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$, y cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

Comprobación de asíntotas. La función es polinómica por tramos y continua en todo $\mathbb{R}$, también en $x=2$; no tiene asíntotas verticales. En los extremos:

Cuando $x \rightarrow -\infty$, se usa el primer tramo $f(x)=2x-x^2$; domina el término $-x^2$ y $f(x) \rightarrow -\infty$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, se usa el segundo tramo $f(x)=x^2-2x$; domina x^2 y $f(x) \rightarrow +\infty$.

No existe asíntota horizontal. Para una posible oblicua, calculamos la pendiente en cada extremo:

En el extremo izquierdo, $f(x)/x=(2x-x^2)/x=2-x \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. En el derecho, $f(x)/x=(x^2-2x)/x=x-2 \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$. En ninguno de los dos extremos la pendiente límite es finita.

Ninguno de estos límites es finito, así que no hay asíntotas oblicuas.

4.2.1 · Región pedida

La región está limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=5$. En $[-1, 0]$, la gráfica queda bajo el eje; en $[0, 5]$, queda sobre él. El sombreado de la figura muestra la región completa.

4.2.2 · Área de la región

El área se calcula con integrales de valor positivo. Separamos en $x=0$, donde la función cambia de signo, y en $x=2$, donde cambia su expresión:

$$A = - \int_{-1}^0 (2x - x^2) dx + \int_0^2 (2x - x^2) dx + \int_2^5 (x^2 - 2x) dx.$$

Una primitiva de $2x - x^2$ es $x^2 - \frac{x^3}{3}$. Por tanto, para el tramo bajo el eje:

$$- \int_{-1}^0 (2x - x^2) dx = - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = - \left(0 - \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

Para el segundo tramo usamos la misma primitiva:

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Una primitiva de $x^2 - 2x$ es $\frac{x^3}{3} - x^2$. Para el último tramo:

$$\int_2^5 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \left(\frac{125}{3} - 25 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 18.$$

Sumamos las tres áreas:

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \boxed{\frac{62}{3} \text{ u}^2 \approx 20.6667 \text{ u}^2}.$$

Conclusión. El área encerrada entre la gráfica, el eje OX y $x = -1$, $x = 5$ es $\boxed{\frac{62}{3} \text{ unidades cuadradas}}.$