

Resolución completa de las opciones A y B, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Opción A - Ejercicio 1

La condición de derivada nula en $x = 1$ da $f'(1) = 0$. Como la función es cúbica y el punto estacionario no es extremo, debe ser un punto de inflexión horizontal; imponemos también $f''(1) = 0$. Además, la gráfica pasa por $(1, 1)$:

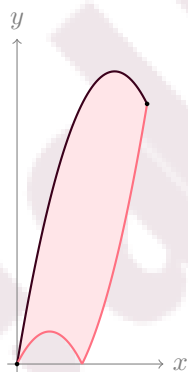
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b, & f''(x) &= 6x + 2a, \\ 3 + 2a + b &= 0, & 6 + 2a &= 0, & 1 + a + b + c &= 1. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación $a = -3$; la primera da $b = 3$ y la tercera $c = 0$. Por tanto, $(a, b, c) = (-3, 3, 0)$. En efecto, $f(x) = (x - 1)^3 + 1$, que tiene inflexión horizontal en $x = 1$.

Opción A - Ejercicio 2

Para hallar los cortes, separamos el valor absoluto: $g(x) = x^2 - 2x$ si $x \leq 0$ o $x \geq 2$, y $g(x) = -x^2 + 2x$ si $0 \leq x \leq 2$. Al igualar cada tramo con $f(x) = 6x - x^2$ se obtienen los cortes $x = 0$ y $x = 4$, ambos con ordenada 0 y 8, respectivamente. En $[0, 2]$ también se verifica la igualdad en $x = 0$; no hay otros cortes.

En $[0, 2]$, $f - g = 4x \geq 0$, y en $[2, 4]$, $f - g = 8x - 2x^2 \geq 0$. Por ello, la región acotada queda entre ambas curvas y el área se calcula sumando esos dos tramos:



$$S = \int_0^2 4x \, dx + \int_2^4 (8x - 2x^2) \, dx = 8 + \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_2^4 = 8 + \frac{32}{3} = \frac{56}{3}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3m+3 & 8 \end{array} \right).$$

Al hacer $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ y $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$, resulta $\det A = 3 - m$. Si $m \neq 3$, el determinante es distinto de cero, así que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado. Si $m = 3$, la tercera ecuación menos dos veces la primera da $0 = 2$, luego $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg } A^* = 3$: el sistema es incompatible. No hay caso compatible indeterminado.

Para $m = -2$:

$$x + 2y + z = 3, \quad x + y + z = -6, \quad 2x + 4y - 3z = 8.$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene $y = 9$. Las dos primeras dan $x + z = -15$; al sustituir $y = 9$ en la tercera, $2x + 3z = -28$. De $x + z = -15$ y $2x + 3z = -28$ se obtiene $z = -2/5$ y $x = -73/5$. La solución es $(-73/5, 9, -2/5)$.

Opción A - Ejercicio 4

Escribimos r en forma paramétrica: $X(t) = (5 + t, t, -2 - 2t)$. Para reflejar P respecto de r , primero proyectamos P sobre la recta. Con $A = (5, 0, -2)$ y $\vec{v} = (1, 1, -2)$, el parámetro del pie es

$$t_H = \frac{(P - A) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(-4, 0, 1) \cdot (1, 1, -2)}{6} = -1.$$

Así, $H = (4, -1, 0)$ y el simétrico es $P' = 2H - P = \boxed{(7, -2, 1)}$.

El punto de r equidistante de P y Q satisface $|X - P|^2 = |X - Q|^2$. Al simplificar se obtiene $(Q - P) \cdot X = (|Q|^2 - |P|^2)/2 = 2$. Sustituyendo $X(t)$, $1 - 2t = 2$, así que $t = -1/2$. El punto pedido es $\boxed{(9/2, -1/2, -1)}$.

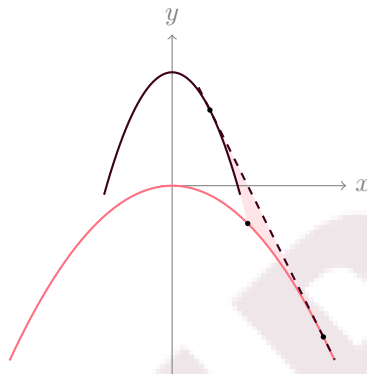
Opción B - Ejercicio 1

Para que la función a trozos sea derivable en $x = 1$, primero debe ser continua. La igualdad de los valores laterales exige $3 - k = 2/k$, de donde $(k - 1)(k - 2) = 0$ (y $k \neq 0$). Las derivadas de los dos trozos en ese punto son $-2k$ y $-2/k$; su igualdad exige $k^2 = 1$. Al combinar ambas condiciones queda $\boxed{k = 1}$.

Opción B - Ejercicio 2

La tangente a $f(x) = 3 - x^2$ en $x = 1$ tiene pendiente $f'(1) = -2$ y pasa por $(1, 2)$; por tanto, es $y = 4 - 2x$. Para $g(x) = -x^2/4$, su derivada es $-x/2$, que vale -2 en $x = 4$; además $g(4) = -4 = 4 - 2 \cdot 4$, luego la misma recta es tangente en $(4, -4)$.

Los cortes relevantes son: recta con f en $x = 1$ (tangencia), recta con g en $x = 4$ (tangencia), y $f = g$ en $x = \pm 2$. La región cerrada usa las curvas entre $x = 1$ y $x = 4$, con cambio de curva inferior en $x = 2$. En $[1, 2]$, $y_{\text{recta}} - f = (x - 1)^2$; en $[2, 4]$, $y_{\text{recta}} - g = (x - 4)^2/4$. Así,



$$S = \int_1^2 (x - 1)^2 dx + \int_2^4 \frac{(x - 4)^2}{4} dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{1}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sean a, b, c los números de monedas de 50 céntimos, 1 euro y 2 euros. Las condiciones se traducen en

$$a + b + c = 30, \quad b = a + c, \quad \frac{a}{2} + b + 2c = T.$$

De las dos primeras, $b = 15$ y $a + c = 15$. Para $T = 34,50$, la última ecuación da $a = 7$ y $c = 8$. Por tanto, el pago es posible de una única manera: $\boxed{7}$ monedas de 50 céntimos, $\boxed{15}$ de un euro y $\boxed{8}$ de dos euros.

Para $T = 35$, las ecuaciones dan $c = 25/3$, que no es entero. Como el número de monedas debe ser entero, el pago de 35 euros no es posible bajo esas condiciones.

Opción B - Ejercicio 4

El vector normal del plano $3x + 2y + z - 5 = 0$ es $\vec{n} = (3, 2, 1)$. El pie de la perpendicular desde P es $H = P - \frac{3(2)+2(-1)+3-5}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = P - \frac{1}{7} \vec{n}$. Por tanto,

$$H = \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7} \right), \quad P' = 2H - P = \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7} \right).$$

La distancia punto-plano vale $|3(2) + 2(-1) + 3 - 5|/\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = 2/\sqrt{14} = \boxed{\sqrt{14}/7}$.