

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Modelo de 2025

Se desarrollan las dos opciones de cada apartado y el problema común de probabilidad.

Problema 1 · Producción y recuento de bolígrafos

A) Sean x e y los frigoríficos de los modelos A y B. Las horas disponibles imponen

$$3x + y \leq 100, \quad x + 2y \leq 100, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio $G = 500x + 400y$ es lineal, así que comprobamos los vértices: $(0, 0)$, $(100/3, 0)$, $(20, 40)$ y $(0, 50)$. Sus beneficios son 0, 50000/3, 26000 y 20000 euros. El mayor se alcanza en la intersección de las dos restricciones: $x = 20$, $y = 40$.

$$20 \text{ frigoríficos A y } 40 \text{ frigoríficos B; } G_{\max} = 26000 \text{ € semanales.}$$

B) Llamamos a, r, n a las cantidades iniciales de bolígrafos azules, rojos y negros. El total y la relación del enunciado dan

$$a + r + n = 50, \quad a = 11 \left(n + \frac{r}{2} \right).$$

Tras el robo quedan $a - 4$, r y $n - 2$ bolígrafos para vender; por eso la ecuación de recaudación es

$$3,75(a - 4) + 2,25r + 1,5(n - 2) = 159.$$

Al resolver el sistema se obtiene $a = 44$, $r = 4$, $n = 2$, que satisface las tres condiciones.

$$44 \text{ azules, } 4 \text{ rojos, } 2 \text{ negros.}$$

Problema 2 · Funciones

A) Para que la función a trozos sea continua, solo hay que igualar los dos valores laterales en $x = -1$:

$$(-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = (-1 - 1)^2 + 3 \implies a - 25 = 7 \implies a = 32.$$

Si $a = 9$, en el tramo considerado la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 = 3(x + 4)(x + 2)$. Su signo cambia de $+$ a $-$ en $x = -4$ y de $-$ a $+$ en $x = -2$. Por tanto, hay un máximo local en $x = -4$ y un mínimo local en $x = -2$:

$$f(-4) = -16, \quad f(-2) = -20.$$

Si $a = 0$, para $2 \leq x \leq 3$ se usa $f(x) = (x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4$, que es positiva. El área coincide con la integral:

$$\int_2^3 (x^2 - 2x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_2^3 = \frac{16}{3}.$$

$$a = 32; \quad \max_{\text{loc}} f = (-4, -16), \quad \min_{\text{loc}} f = (-2, -20); \quad A = \frac{16}{3}.$$

B) El tiempo de uso x no puede ser negativo, de modo que el dominio físico es $x \geq 0$. El rendimiento es

$$R(x) = \frac{50x}{1 + x^2} + 50, \quad R'(x) = \frac{50(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

La derivada es positiva entre 0 y 1 y negativa para $x > 1$; así, el máximo se alcanza al año y vale $R(1) = 75\%$. Además $R(x) - 50 = 50x/(1 + x^2) \geq 0$, luego nunca baja del 50%. Para el umbral del 65%, resolvemos

$$R(x) < 65 \iff 3x^2 - 10x + 3 > 0 \iff x < \frac{1}{3} \text{ o } x > 3.$$

Como se considera el reemplazo a partir del primer año y el rendimiento decrece después del máximo, queda por debajo del 65% para $x > 3$: llega exactamente al 65% al cumplir tres años.

$$R_{\max} = 75\% \text{ al año; } R(x) \nless 50\%; \text{ reemplazo al superar los 3 años.}$$

Problema 3 · Estudios y actividades

De los 400 estudiantes, 310 están en ESO y 90 en Bachillerato. En ESO, 20 eligen música; los 90 de Bachillerato se reparten entre 70 de fútbol, 12 de baloncesto y 8 de música. Por tanto, hay 28 estudiantes de música y 72 de baloncesto.

a) Sumamos los casos «ESO» y «música» y restamos la intersección, que se contó dos veces:

$$P(\text{ESO} \cup M) = \frac{310 + 28 - 20}{400} = \frac{159}{200}.$$

b) Hay $300 + 72 = 372$ estudiantes en actividades deportivas, de los que 290 son de ESO:

$$P(\text{ESO} \mid \text{deporte}) = \frac{290}{372} = \frac{145}{186}.$$

c) Bachillerato y no baloncesto comprende los 70 de fútbol y los 8 de música. Comparamos la intersección con el producto de las probabilidades:

$$P(\text{Bach} \cap \overline{\text{Bal}}) = \frac{78}{400} = \frac{39}{200}, \quad P(\text{Bach})P(\overline{\text{Bal}}) = \frac{90}{400} \cdot \frac{328}{400} = \frac{369}{2000}.$$

Como no coinciden, los sucesos no son independientes.

$P(\text{ESO} \cup M) = \frac{159}{200}; \quad P(\text{ESO} \mid \text{deporte}) = \frac{145}{186}; \quad \text{no son independientes.}$
--