

PROBLEMA A.1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m + 1 \\ x + 3y + (m-2)z = m - 1 \end{cases}$$

donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

- Todas las soluciones del sistema S cuando $m = 2$. (4 puntos)
- Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. (2 puntos)
- El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ (4 puntos)

Solución:

a) Para $m = 2$ el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{de este sistema, sus matriz ampliada es,} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Estudiemos el rango de A

$$\left. \begin{aligned} |1| &= 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right| &= -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right| &= 6 + 3 - 9 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Estudiemos el rango de A' , como $\text{ran}(A) = 2 \rightarrow \text{ran}(A') \geq 2$. Ampliamos el menor de orden 2 no nulo de A' , que es el obtenido anteriormente en A , con la cuarta columna y tercera fila:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| = 12 + 5 - 15 - 2 = 0 \quad \text{Por lo tanto } \text{ran}(A') = 2$$

Lo obtenido es: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Resolvemos el sistema usando las ecuaciones (1^a y 2^a) e incógnitas (x, y) que han proporcionado este rango.

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} x + y = 2 - z \\ 2x = 5 - 3z \end{cases}$$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 5-3z & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5+3z}{-2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 5-3z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1(5-3z) - 2(2-z)}{-2} = \frac{5-3z-4+2z}{-2} = \frac{1-z}{-2} = \frac{-1+z}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z$$

$$\text{Finalmente, para } m = 2 \text{ las soluciones del sistema } S \text{ son: } \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Como el sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas tendrá solución única cuando sea un sistema compatible determinado. Calculemos los valores de m .

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array} \right)$$

A es 3×3 , luego el máximo rango de A es 3; A' es 3×4 , luego el máximo rango de A' es 3. Por lo tanto empezamos estudiando el rango de A .

Estudiamos el menor de orden 3 de A ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 9 - 2(m-2) = -2m + 4$$

$$-2m + 4 = 0 \rightarrow -2m = -4 \rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2$$

Luego, para $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y como el máximo rango posible de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$, luego: para $m \neq 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$

Finalmente, el sistema tiene solución única cuando $m \neq 2$

c) Para $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$ el sistema quedará

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{2} \right) + 0 = m \\ 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 0 = 2m + 1 \\ \frac{3}{2} + 3 \left(\frac{-1}{2} \right) + (m-2) \cdot 0 = m-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = m \\ 3 = 2m + 1 \\ 0 = m - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = m \\ 2 = 2m \\ 1 = m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = m \\ 1 = m \\ 1 = m \end{cases} \rightarrow m = 1$$

El sistema S admite la solución $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$ para $m = 1$.

PROBLEMA A.2. En el espacio se dan las rectas

$$r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

- Un punto y un vector director de cada recta. (3 puntos)
- La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos)
- Determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s . (3 puntos)

Solución:

a) Calculemos las ecuaciones paramétricas de las rectas resolviendo los sistemas que las definen,

$$r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, resolvemos usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x = 2 - z \\ 2x - y = -z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación:

$$2(2 - z) - y = -z; \quad 4 - 2z - y = -z; \quad -y = -4 + 2z - z; \quad -y = -4 + z; \quad y = 4 - z$$

$$\text{luego } r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y un punto y un vector director de la recta } r \text{ serán: } \begin{matrix} P_r = (2, 4, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, -1, 1) \end{matrix}$$

$$s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, resolvemos usando z e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} -y = 3 - 2x \\ -y - z = 2 - x \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y = -3 + 2x$

Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación:

$$-(-3 + 2x) - z = 2 - x; \quad 3 - 2x - z = 2 - x; \quad -z = 2 - x - 3 + 2x; \quad -z = -1 + x; \quad z = 1 - x$$

$$\text{luego } s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -3 + 2\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{y un punto y un vector director de la recta } s \text{ serán: } \begin{matrix} P_s = (0, -3, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -1) \end{matrix}$$

b) Estudiamos la posición relativa de las rectas r y s a partir del sistema que se obtiene al igualar sus ecuaciones paramétricas,

$$\begin{cases} 2 - \lambda = \mu \\ 4 - \lambda = -3 + 2\mu \\ \lambda = 1 - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\lambda - \mu = -2 \\ -\lambda - 2\mu = -7 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = 7 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

La 1ª y la 3ª ecuaciones son incompatibles, por lo tanto r y s son paralelas o se cruzan.

Veamos si los vectores directores de las rectas son paralelos,

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores directores: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 + 2 = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2, \text{ los vectores no son paralelos.}$$

Por lo tanto, las rectas r y s se cruzan.

$$P_r \in \pi$$

c) Buscamos un plano $\pi / r \subset \pi$ y $\pi \parallel s$, por lo tanto del plano π conocemos $\vec{v}_r$ es director de π
 $\vec{v}_s$ es director de π

Por lo tanto, las ecuaciones del plano π serán:

$$\text{Ecuación paramétrica: } \pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 4 - \lambda + 2\mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación general: } \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-1) - (y-4)0 + z(-1) = 0$$

$$-x + 2 - z = 0; \quad x + z = 2$$

$$\pi: x + z = 2$$

PROBLEMA A.3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Obtener **razonadamente**:

- El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (3 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (4 puntos)
- La integral $\int f(x) dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$ (3 puntos)

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Cálculo del dominio,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo que $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 2$.

$x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1^2 - 3 \cdot 1 + 2} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow x = 1 \text{ es a. v.}$$

$x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{2^2 - 3 \cdot 2 + 2} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x = 2 \text{ es a. v.}$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Luego $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,

La asíntota oblicua será la recta de ecuación $y = mx + n$; calculando los coeficientes m y n

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como $m = 0$, no hay asíntota oblicua.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$,
 Estudiemos el signo de y' ,

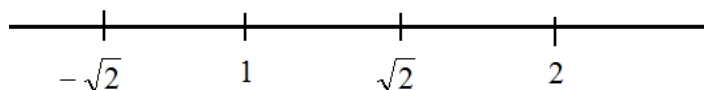
$$y' = \frac{1(x^2 - 3x + 2) - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{x^2 - 3x + 2 - 2x^2 + 3x}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

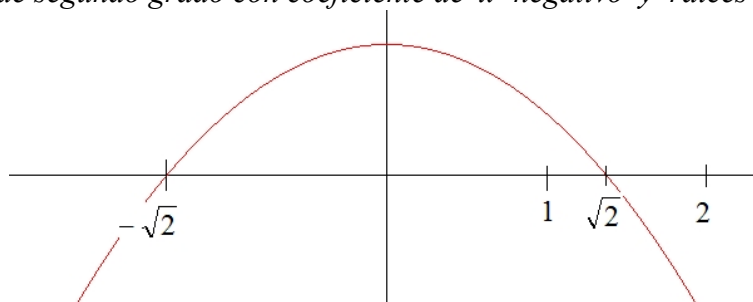
$$-x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$(x^2 - 3x + 2)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (\text{resuelta en el apartado a)}) \quad x = 1, 2$$

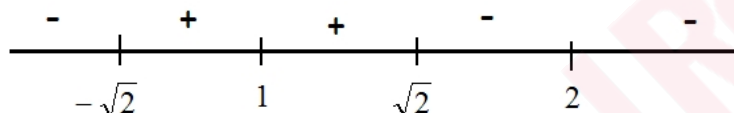
Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,



Como el denominador de y' está elevado al cuadrado, el signo de y' sólo depende del numerador que es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm\sqrt{2}$, es decir:



Por lo que el signo de y' será:



Finalmente $f(x)$ es creciente en $(-\sqrt{2}, 1) \cup (1, \sqrt{2})$ y decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2) \cup (2, +\infty)$.

c) Cálculo de la integral,

El denominador tiene dos raíces simples, $x=1$ y $x=2$, luego

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Luego, $x = A(x-2) + B(x-1)$, calculemos los valores de A y B :

$$\text{para } x=1 \rightarrow 1 = -A + 0 \rightarrow A = -1$$

$$\text{para } x=2 \rightarrow 2 = 0 + B \cdot 1 \rightarrow B = 2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = \\ &= -\ln|x-1| + 2 \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

PROBLEMA B.1. Se da la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

- Obtener razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m . (5 puntos)
- Explicar por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. (2 puntos)
- Obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1} . Comprobar que los productos $A A^{-1}$ y $A^{-1} A$ dan la matriz unidad. (3 puntos)

Solución:

a) Rango de A .

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = -m(m^2 - 1) - 2m = -m^3 + m - 2m = -m^3 - m$$

$$-m^3 - m = 0 \rightarrow -m(m^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} -m = 0 \rightarrow m = 0 \\ m^2 + 1 = 0 \rightarrow m^2 = -1; \text{ sin solución} \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq 0$, $\text{ran}(A) = 3$

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

b) Para $m = 1$ sabemos, según lo calculado en el apartado anterior, que $|A| = -1^3 - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$, por lo tanto, cuando $m = 1$, existe la matriz inversa de A .

c) Cálculo de A^{-1} cuando $m = 1$

$$\text{Para } m = 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = -2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ cálculo de los menores: } \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ adjuntos: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ +1 & -2 & +1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

traspuesta: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Y finalmente $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Comprobemos los productos indicados,

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot \frac{-1}{2} + 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{-1}{2} & -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De forma similar obtendríamos el otro producto $A^{-1} A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Luego, hemos comprobado que los productos $A A^{-1}$ y $A^{-1} A$ dan la matriz unidad.

PROBLEMA B.2. En el espacio se dan las rectas

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad y \quad s: \{x - 1 = y = z - 3\}$$

Obtener **razonadamente**:

- Un vector director de cada una de las rectas. (2 puntos)
- La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 1, 3)$. (3 puntos)
- El punto de intersección de las rectas r y s (2 puntos) y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas r y s (3 puntos).

Solución:

a) La ecuación de la recta r es la paramétrica, luego $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$

La ecuación de la recta s es la continua, luego $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$

b) ¿Plano $\pi / \pi \perp r$ y $(0, 1, 3) \in \pi$?

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, -1, 0)$. Por lo tanto la ecuación del plano π será: $x - y + 0 \cdot z + D = 0$; operando $x - y + D = 0$

Como $(0, 1, 3) \in \pi \rightarrow 0 - 1 + D = 0$; $D = 1$

Finalmente, la ecuación del plano π es: $x - y + 1 = 0$

c) Cálculo del punto $P = r \cap s$

Escribamos la ecuación paramétrica de la recta s : $\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$

El punto P lo obtenemos resolviendo el sistema $\begin{cases} \lambda = 1 + \mu \\ 1 - \lambda = \mu \\ 3 = 3 + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$, sustituyendo el valor de μ en la 1ª y

en la 2ª ecuaciones: $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$. Por lo que la solución del sistema es $\lambda = 1$ y $\mu = 0$.

El punto P lo obtendremos sustituyendo el valor de λ en la ecuación de la recta r o el valor de μ en la ecuación de la recta s .

Sustituyendo el valor de $\lambda = 1$ en la recta r , obtenemos $P = (1, 0, 3)$

Cálculo del plano π que contiene a r y s . El plano π contendrá al punto P y dos de sus vectores directores serán los de las rectas r y s . Por lo tanto la ecuación de π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)(-1) - y \cdot 1 + (z-3) \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$-x + 1 - y + 2z - 6 = 0 \rightarrow -x - y + 2z - 5 = 0 \rightarrow x + y - 2z + 5 = 0$$

Es decir, $\pi: x + y - 2z + 5 = 0$

PROBLEMA B.3. Se desea construir un campo rectangular con vértices A, B, C y D de manera que: Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.

Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \leq x \leq 4$, y el segmento de extremos C y D es horizontal.

Los puntos A y C deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo x .

Los puntos B y D deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.

Se pide obtener **razonadamente**:

- La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x . (4 puntos)
- El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. (4 puntos)
- El valor del área máxima. (2 puntos)

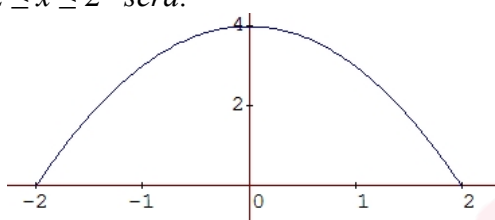
Solución:

El arco de parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ será:

$$x = 0 \rightarrow y = 4$$

$$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

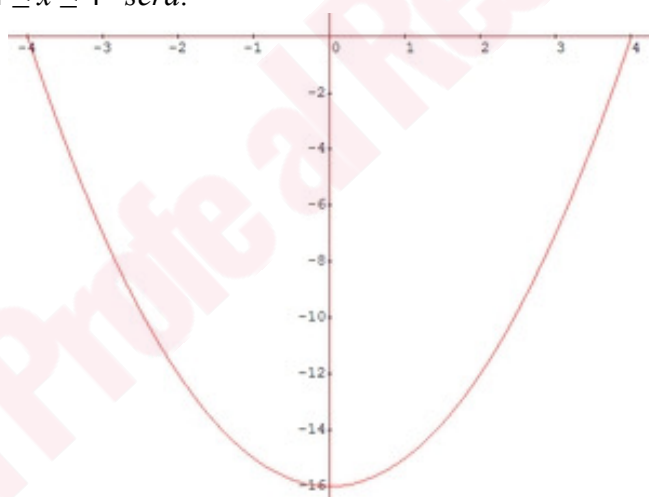


El arco de parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \leq x \leq 4$ será:

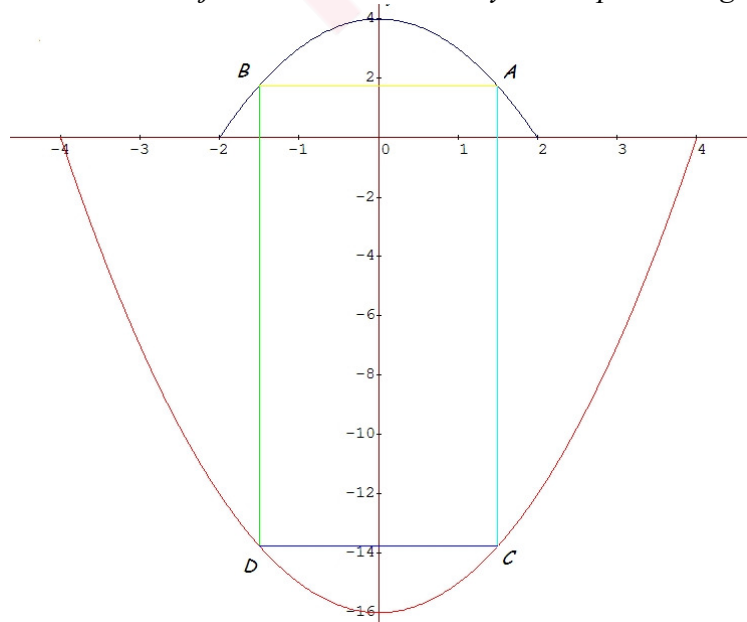
$$x = 0 \rightarrow y = -16$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$



La representación conjunta de los dos arcos y el campo rectangular será:



Las coordenadas de los puntos son:

$$A(x, 4 - x^2), B(-x, 4 - x^2)$$

$$C(x, x^2 - 16), D(-x, x^2 - 16)$$

Por construcción $x \in (0, 2]$

a) El área del campo rectangular será:

La base del rectángulo mide $2x$

La altura del rectángulo mide $4 - x^2 - (x^2 - 16) = 4 - x^2 - x^2 + 16 = 20 - 2x^2$

Por lo que $S(x) = 2x(20 - 2x^2) = 40x - 4x^3$, $x \in (0, 2]$

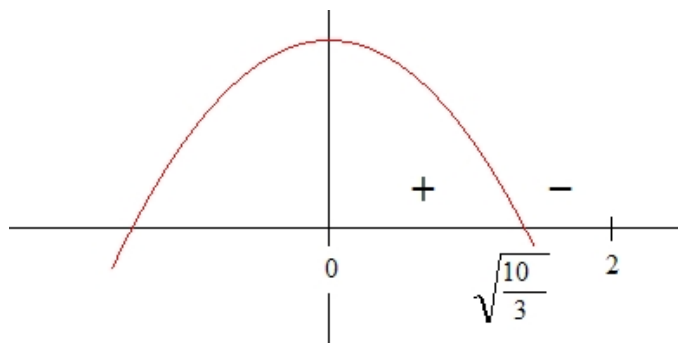
b) Para encontrar el máximo de $S(x)$ estudiemos el signo de $S'(x)$.

$$S'(x) = 40 - 12x^2, \quad x \in (0, 2]$$

$$40 - 12x^2 = 0; \quad 12x^2 = 40; \quad x^2 = \frac{40}{12}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{40}{12}} = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}. \quad \text{Como } x \in (0, 2] \rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.825 \in (0, 2]$$

Calculemos el máximo de forma gráfica.

$S'(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm \sqrt{\frac{10}{3}}$



Por lo tanto en $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ hay un máximo absoluto ya que a la izquierda $S'(x)$ es creciente y a la derecha

decreciente. Es decir, $S(x)$ es máxima para $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

c) Cálculo del valor del área máxima.

$$S\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 = 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\frac{10}{3}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \left(40 - \frac{40}{3}\right)\sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{80}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} \cong 48.6864 \text{ u}^2$$

El valor del área máxima es de aproximadamente 48.6864 u^2 .