

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Operaciones matriciales

La matriz V es un vector columna de orden 3×1 . Para el apartado a), calculamos primero el producto que aparece en la condición:

$$M^T V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - a^2 \\ a - 1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3 \\ a^2 + a - 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Igualamos sus componentes con las del vector $(5, 1, 5)^T$. La primera da $2a + 3 = 5$, de donde $a = 1$; con este valor la segunda también se cumple, pues $1^2 + 1 - 1 = 1$. La tercera igualdad se cumple para cualquier a .

Para el apartado b), $\det M = 2 \neq 0$, así que M es invertible. De $XM - I_3 = N$ se obtiene $XM = N + I_3$ y, multiplicando por M^{-1} a la derecha, $X = (N + I_3)M^{-1}$. Con

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

resulta

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el apartado c), VN^T no está definido: las dimensiones interiores son 1 y 3. En cambio, $N + M^T$ es una matriz 3×3 , que sí puede multiplicarse por V (3×1); el resultado tiene orden 3×1 .

$$a) a = 1; \quad b) M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad c) VN^T \text{ no existe; } (N + M^T)V \text{ es } 3 \times 1.$$

Ejercicio 2 · Optimización del número de equipos

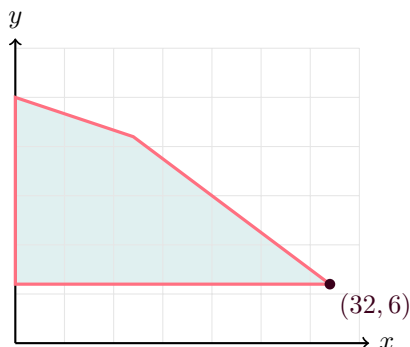
Sean x e y los equipos del primer y segundo tipo, respectivamente. Las disponibilidades de desarrolladores y el mínimo de equipos del segundo tipo dan

$$2x + 6y \leq 150, \quad 3x + 4y \leq 120, \quad y \geq 6, \quad x, y \geq 0.$$

Queremos maximizar $T(x, y) = x + y$. Los vértices de la región factible son $(0, 6)$, $(32, 6)$, $(12, 21)$ y $(0, 25)$. Evaluamos el número total de equipos:

(x, y)	$(0, 6)$	$(32, 6)$	$(12, 21)$	$(0, 25)$
$T(x, y)$	6	38	33	25

El máximo se alcanza en $(32, 6)$. Comprobamos los recursos utilizados: $2(32) + 6(6) = 100$ desarrolladores de Javascript y $3(32) + 4(6) = 120$ de Python. Se cumple la disponibilidad de ambos perfiles.



$$x = 32, y = 6, \quad T_{\max} = 38;$$

$J = 100$ desarrolladores de Javascript, $P = 120$ de Python.

Bloque B

Ejercicio 3 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = 1 - \frac{4}{x+3}$. Su denominador no puede anularse, por lo que

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

a) Para hallar el corte con el eje X , resolvemos $f(x) = 0$; para el corte con el eje Y , calculamos $f(0)$:

$$f(x) = 0 \iff x + 3 = 4 \iff x = 1, \quad f(0) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Los cortes son $(1, 0)$ y $(0, -\frac{1}{3})$.

b) En $x = -3$ puede haber una asíntota vertical. Los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty,$$

así que $x = -3$ es asíntota vertical. Cuando x tiende a cualquiera de los infinitos, $4/(x+3)$ tiende a cero; por tanto, $y = 1$ es asíntota horizontal en ambos extremos.

c) La pendiente de la tangente en un punto de abscisa x es $f'(x)$. Como

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2},$$

igualamos esta derivada a la pendiente pedida, 1:

$$\frac{4}{(x+3)^2} = 1 \iff (x+3)^2 = 4 \iff x = -5 \text{ o } x = -1.$$

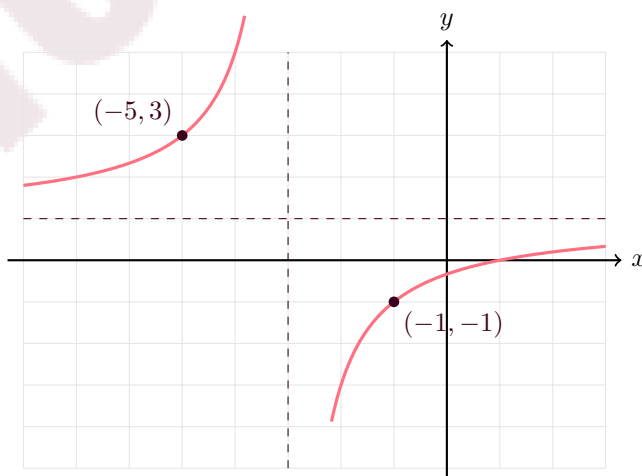
Las ordenadas son $f(-5) = 3$ y $f(-1) = -1$, de modo que los puntos son $(-5, 3)$ y $(-1, -1)$.

d) La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{8}{(x+3)^3}.$$

Si $x < -3$, $f''(x) > 0$ y la gráfica es convexa; si $x > -3$, $f''(x) < 0$ y es cóncava. No hay punto de inflexión, porque el único cambio de signo se produce al atravesar $x = -3$, que no pertenece al dominio.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}; \quad (1, 0), (0, -\frac{1}{3});$
Asíntotas: $x = -3, y = 1$; tangencia: $(-5, 3), (-1, -1);$
convexa en $(-\infty, -3)$, cóncava en $(-3, \infty)$.



Ejercicio 4 · Continuidad, derivabilidad y área

La función está definida por polinomios en ambos tramos, así que su dominio es $\mathbb{R}$. El único punto que hay que comprobar es el de unión, $x = 2$. En él,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2^2 + 2(2) = 0, \quad f(2) = 2^2 - 2(2) = 0.$$

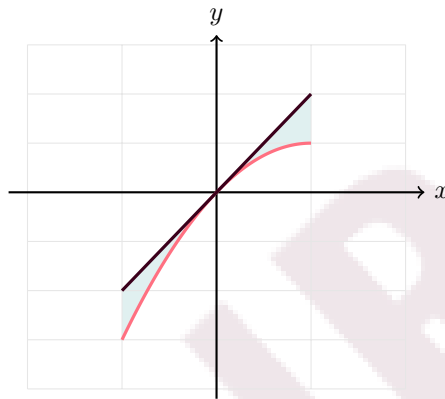
Los límites laterales y el valor coinciden, por lo que f es continua en $x = 2$. Las derivadas laterales son

$$f'_-(2) = (-2x + 2)|_{x=2} = -2, \quad f'_+(2) = (2x - 2)|_{x=2} = 2;$$

no coinciden, así que f no es derivable en ese punto.

En $[-1, 1]$ se usa la rama $f(x) = -x^2 + 2x$. La diferencia entre la recta y la curva es $2x - f(x) = x^2 \geq 0$, de modo que la recta queda por encima. Se cortan en $x = 0$, así que calculamos las dos áreas:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$



f es continua, pero no derivable, en $x = 2$; $\mathcal{A} = \frac{2}{3}.$

Bloque C

Ejercicio 5 · Extracciones sin reemplazo

Hay 15 papeletas: 3 dicen «mercado», 2 «leña» y 10 «casa». Como se extraen sin reemplazo, después de la primera extracción quedan 14 papeletas; las probabilidades de un mismo camino se multiplican. a) Para que las dos primeras digan «mercado»,

$$P(M_1 \cap M_2) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{35}.$$

b) Hay 5 papeletas que no dicen «casa». La probabilidad de que ambas primeras procedan de esas 5 es

$$P(C_1^c \cap C_2^c) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}.$$

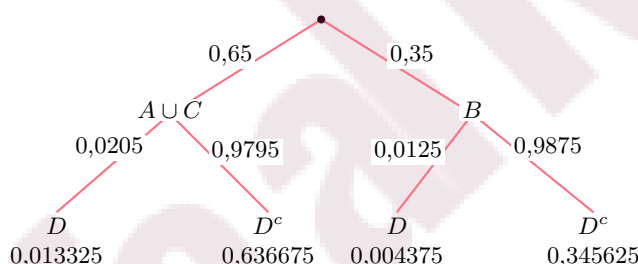
c) Sabiendo que la segunda papeleta dice «leña», entre las 14 restantes que podían ocupar la primera posición queda una papeleta «leña». Por simetría,

$$P(L_1 | L_2) = \frac{1}{14}.$$

a) $\frac{1}{35}$; b) $\frac{2}{21}$; c) $\frac{1}{14}$.

Ejercicio 6 · Probabilidad total y sucesos compuestos

Sean B el suceso «alarma básica», S «alarma superior» e I «presenta incidencias». De las 50 alarmas, 30 son básicas; así, $P(B) = 0,6$ y $P(S) = 0,4$. Además, $P(I) = 0,2$ y $P(I | B) = 0,3$. En el árbol, las probabilidades de cada camino se obtienen multiplicando las ramas:



En efecto, $P(B \cap I) = 0,6(0,3) = 0,18$. Como la probabilidad total de incidencias es 0,2, queda $P(S \cap I) = 0,2 - 0,18 = 0,02$ y, por tanto, $P(I | S) = 0,02/0,4 = 0,05$.

a) La probabilidad de que sea básica y no presente incidencias es $P(B \cap I^c) = 0,6(0,7) = 0,42$.

b) Para que no presente incidencias y sea superior, restamos las superiores con incidencias: $P(S \cap I^c) = 0,4 - 0,02 = 0,38$.

c) La probabilidad condicionada de que sea básica sabiendo que tiene incidencias es

$$P(B | I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{0,18}{0,2} = 0,9.$$

d) Los sucesos «básica e incidencias» y «superior sin incidencias» son incompatibles; por ello, la probabilidad de que ocurra uno u otro es la suma:

$$P((B \cap I) \cup (S \cap I^c)) = 0,18 + 0,38 = 0,56.$$

a) 0,42; b) 0,38; c) 0,9; d) 0,56.

Bloque D

Ejercicio 7 · Intervalo de confianza para una proporción

De los 400 envíos examinados, 370 llegaron a tiempo, de modo que $\hat{p} = 370/400 = 0,925$. Para un intervalo bilateral de una proporción usamos

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Con confianza del 93%, $z_{0,965} \approx 1,8119$. Así,

$$0,925 \pm 1,8119 \sqrt{\frac{0,925(0,075)}{400}} = 0,925 \pm 0,0239,$$

y el intervalo es aproximadamente (0,9011, 0,9489). El estándar del 88% está dentro del intervalo, por lo que la muestra es compatible con que la empresa alcance ese nivel de entregas a tiempo.

Para el apartado b), «amplitud» es la longitud total del intervalo, es decir, dos veces el margen de error. Con el mismo valor de $\hat{p}$ y confianza del 95%, exigimos

$$2z_{0,975} \sqrt{\frac{0,925(0,075)}{n}} < 0,03.$$

Despejando,

$$n > \frac{4z_{0,975}^2(0,925)(0,075)}{0,03^2} \approx 1184,45.$$

El menor entero que cumple la desigualdad es 1185 envíos.

$$IC_{93\%} \approx (0,9011, 0,9489); \quad n_{\min} = 1185.$$

Ejercicio 8 · Distribución de medias e intervalo para la media

a) El tiempo de una pieza de mobiliario sigue $X \sim N(60, 30^2)$. Para una muestra de 100 piezas, la media muestral tiene distribución normal con media 60 y desviación típica $30/\sqrt{100} = 3$:

$$\bar{X} \sim N(60, 3^2).$$

Estandarizamos el valor 54 para calcular la probabilidad pedida:

$$P(\bar{X} > 54) = P\left(Z > \frac{54 - 60}{3}\right) = P(Z > -2) = \Phi(2) \approx 0,9772.$$

b) En el caso de las puertas, $\bar{x} = 40$, $n = 25$ y la desviación típica poblacional conocida es $\sigma = 20$ min. El intervalo bilateral para la media con confianza del 97% es

$$\bar{x} \pm z_{0,985} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad z_{0,985} \approx 2,1701.$$

El error máximo es

$$E = 2,1701 \frac{20}{\sqrt{25}} = 8,6804 \text{ min},$$

por lo que el intervalo resulta $(40 - 8,6804, 40 + 8,6804) = (31,3196, 48,6804)$ minutos.

$$\text{a) } P(\bar{X} > 54) \approx 0,9772; \quad \text{b) } IC_{97\%} \approx (31,3196, 48,6804) \text{ min}, \quad E \approx 8,6804 \text{ min}.$$