

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax & -z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x & + z = 2 \end{cases}$$

Donde a es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible (4 puntos)
- Todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible indeterminado. (3 puntos)
- La solución del sistema cuando $a = -1$. (3 puntos)

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a$$

$$a^2 + 2a = 0 \rightarrow a(a+2) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a + 2 = 0 \rightarrow a = -2 \end{cases}$$

Entonces,

para $a \neq -2$ y 0 , $|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y, como el máximo rango de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$, por lo que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

para $a = -2$, $|A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

Como $F_3 = -F_1$, en el estudio del rango de A' podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2×3 , el máximo rango de A será 2),

$$\left. \begin{array}{l} |-2| = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = 4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como el máximo rango de A' también sería 2 (A' es 2×4) $\rightarrow \text{ran}(A') = 2$

Por tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$

para $a = 0$, $|A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de A,

$$\left. \begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculemos el rango de A',

Considerando el estudio realizado anteriormente $\text{ran}(A') \geq 2$, el menor de orden 3 de A' por estudiar es:

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right| = -2 + 4 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ **Sistema Incompatible**

Respondamos a las preguntas,

a) El sistema es incompatible para $a = 0$.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a = -2$.

Del estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver en este caso es:

$$\begin{cases} -2x & -z = -2 \\ 2x - 2 & y + z = 1 \end{cases} \quad \text{Siendo } x \text{ e } y \text{ las incógnitas principales}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2+z & 0 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2z}{4} = 1 - \frac{z}{2}$$

$$\begin{cases} -2x & = -2+z \\ 2x-2 & y = 1-z \end{cases} \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2+2z+4-2z}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Finalmente, para } a = -2 \text{ las soluciones del sistema son: } \begin{cases} x = 1 - \frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Solución para $a = -1$

Si $a = -1$, $a \neq -2$ y 0 , por lo que el sistema es compatible determinado

El sistema es
$$\begin{cases} -x & -z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x & + z = 2 \end{cases}$$
 Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2}{1-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1-4-2+2+2+2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \{F_3 = -2xF_1\} \frac{0}{-1} = 0$$

La solución del sistema para $a = -1$ es: $\{x = 1, y = 1, z = 0\}$

Tu Prof te al Rescate

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1 \\ y=2\alpha \\ z=\alpha-2 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La recta paralela a r que pasa por el punto $(0,1,0)$. (3 puntos)
- El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s . (3 puntos)
- La distancia entre las rectas r y s . (4 puntos)

Solución:

a) ¿Recta t ? / $t \parallel r$ y $(0,1,0) \in t$

Obtengamos la ecuación paramétrica de r .

En la recta r , $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+6=7 \neq 0$

Por tanto resolvemos el sistema: $r: \begin{cases} x-2y=-z-3 \\ 3x+y=z-1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z-3 & -2 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-z-3+2z-2}{7} = \frac{-5+z}{7} = \frac{-5}{7} + \frac{z}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-3 \\ 3 & z-1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{z-1+3z+9}{7} = \frac{8+4z}{7} = \frac{8}{7} + \frac{4z}{7}$$

$$\rightarrow r: \begin{cases} P_r\left(\frac{-5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right) \\ \vec{v}_r\left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 1\right) \approx (1, 4, 7) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{-5}{7} + \frac{\lambda}{7} \\ y = \frac{8}{7} + \frac{4\lambda}{7} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$$

De la recta t hemos obtenido $\begin{cases} \text{punto } (0,1,0) \\ \text{como } t \parallel r \rightarrow \vec{v}_t \parallel \vec{v}_r \rightarrow \vec{v}_t = (1,4,7) \end{cases}$ por lo que la ecuación paramétrica

de la recta t será: $\begin{cases} x = \mu \\ y = 1+4\mu \\ z = 7\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$

b) ¿Plano π ? / $r \subset \pi$ y $\pi \parallel s$

Como $r \subset \pi \rightarrow P_r\left(\frac{-5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right) \in \pi$ y $\vec{v}_r$ es vector director de π .

Como $\pi \parallel s \rightarrow \vec{v}_s$ es vector director de π .

La ecuación general del plano π la obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{5}{7} & y - \frac{8}{7} & z \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(x + \frac{5}{7}\right)4 + 2z - 14\left(x + \frac{5}{7}\right) - \left(y - \frac{8}{7}\right) = 0$$

$$-10\left(x + \frac{5}{7}\right) + 2z - \left(y - \frac{8}{7}\right) = 0$$

$$-10x - \frac{50}{7} + 2z - y + \frac{8}{7} = 0$$

$$-10x - y + 2z - 6 = 0$$

$$10x + y - 2z + 6 = 0$$

Solución: $\pi: 10x + y - 2z + 6 = 0$

c) ¿ $d(r,s)$?

Estudiamos la posición relativa entre las rectas r y s .

Debemos estudiar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_r P_s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{v}_r(1,4,7) \\ \vec{v}_s(0,2,1) \\ P_r\left(\frac{-5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right) \\ P_s(1,0,-2) \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{P_r P_s}\left(\frac{12}{7}, \frac{-8}{7}, -2\right)$$

Rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{12}{7} & \frac{-8}{7} & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |I| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rango} \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rango} \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{12}{7} & \frac{-8}{7} & -2 \end{vmatrix} = -4 + \frac{48}{7} - 24 + \frac{8}{7} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{rango} = 3 \end{cases}$$

Por tanto las rectas r y s se cruzan y $d(r,s) = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix} \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}$

$$\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_r P_s} \right] = \{\text{lo hemos obtenido en el cálculo del rango}\} = -20$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{k} - 14\vec{j} = -10\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (-10, -1, 2)$$

$$\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| = \sqrt{(-10)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{105}$$

Finalmente, $d(r,s) = \frac{|-20|}{\sqrt{105}} = \frac{20}{\sqrt{105}}$

Otra forma de obtener $d(r,s)$ es la siguiente:

El plano π del apartado anterior contiene a la recta r y es paralelo a la recta $s \rightarrow d(r,s) = d(s,\pi)$ y como la recta s es paralela al plano $\pi \rightarrow d(s,\pi) = d(P_s,\pi)$.

P_s es un punto de la recta s , por ejemplo, $P_s(1,0,-2)$

y el plano $\pi: 10x + y - 2z + 6 = 0$

$$\text{Luego, } d(r,s) = d(P_s,\pi) = \frac{|10 \cdot 1 + 0 - 2(-2) + 6|}{\sqrt{10^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|10 + 4 + 6|}{\sqrt{105}} = \frac{20}{\sqrt{105}}$$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Dominio y asíntotas de la función f . (2 puntos)
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f . (3 puntos)
- La integral $\int f(x) dx$. (3 puntos)
- El valor de $a > 4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 4$ y $x = a$ es $\ln(3/2)$. (4 puntos)

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Dominio,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Por tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

Asíntotas.

Asíntotas verticales,

Las posibles asíntotas verticales son $x = 2$ y $x = 3$. Comprobemos.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ por tanto } x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ por tanto } x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\}, \text{ por tanto } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal}$$

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ por tanto no tiene asíntota oblicua.}$$

La función f tiene dos asíntotas verticales, $x = 2$ y $x = 3$, y una asíntota horizontal $y = 0$.

b) Monotonía de la función f .

Estudiemos el signo de $f'(x)$.

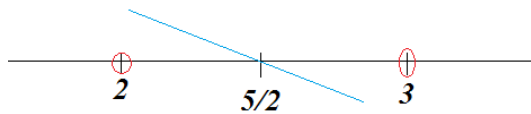
$$f'(x) = \frac{-(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} = \frac{-2x + 5}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

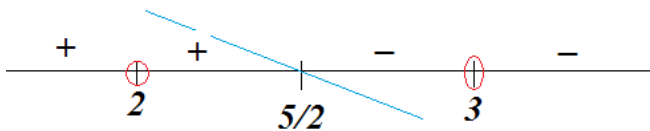
$$-2x + 5 = 0 \rightarrow -2x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$(x^2 - 5x + 6)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \{ \text{resuelta en a) } \} \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Como en $f'(x)$ el denominador es un término al cuadrado, es positivo. Luego el signo de f' depende del numerador que, gráficamente, es una recta de pendiente negativa que pasa por $(5/2, 0)$, por lo que:



El signo de f' es:



Finalmente, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, \frac{5}{2})$ y decreciente en $(\frac{5}{2}, 3) \cup (3, +\infty)$.

c) $\int f(x) dx$.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx =$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \rightarrow 1 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$\text{Para } x=3 \rightarrow 1 = B \quad A = -1$$

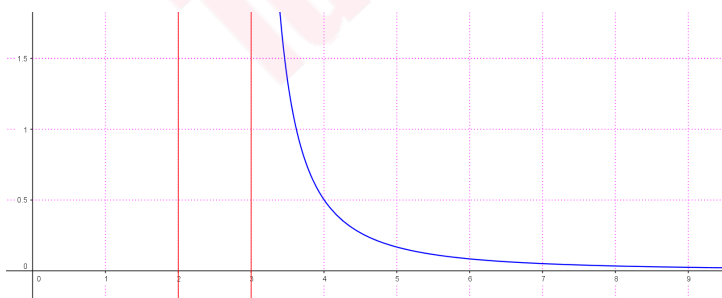
$$\text{Para } x=2 \rightarrow 1 = -A \quad B = 1$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$$

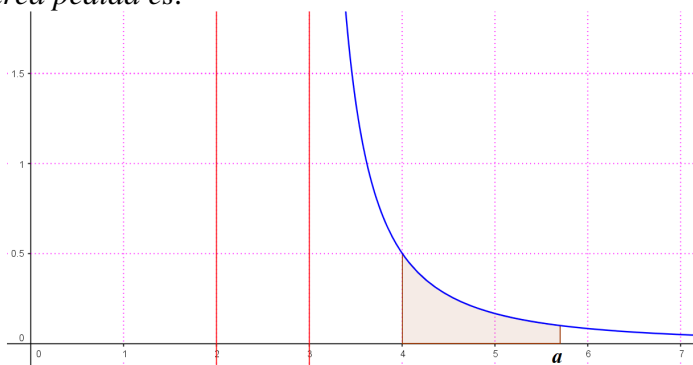
d) ¿a? / $a > 4$ y el área de la superficie limitada por $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 4$ y $x = a$ es $\ln(3/2)$.

Para determinar el área a calcular representemos la función $f(x)$, para $x \geq 4$, a partir de la información obtenida en los apartados a) y b) y algún punto de la función, por ejemplo,

$$x=4, \quad f(4) = \frac{1}{4^2 - 5 \cdot 4 + 6} = \frac{1}{2}.$$



El área pedida es:



Para calcular este área realizamos la siguiente integral definida:

$$\int_4^a \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Considerando la integral indefinida obtenida el apartado c,

$$\int_4^a \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \left[\ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \right]_4^a =$$

$$= \left[\operatorname{Ln} \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \right]_4^a = \operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| - \operatorname{Ln} \left| \frac{4-3}{4-2} \right| = \operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| - \operatorname{Ln} \left| \frac{1}{2} \right| = \operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| - \operatorname{Ln} \frac{1}{2}$$

Como el área debe ser $\operatorname{Ln}(3/2)$, entonces:

$$\operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| - \operatorname{Ln} \frac{1}{2} = \operatorname{Ln} \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| = \left(\operatorname{Ln} \frac{3}{2} \right) + \left(\operatorname{Ln} \frac{1}{2} \right)$$

$$\operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| = \operatorname{Ln} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$\operatorname{Ln} \left| \frac{a-3}{a-2} \right| = \operatorname{Ln} \left(\frac{3}{4} \right) \rightarrow \left| \frac{a-3}{a-2} \right| = \frac{3}{4} \begin{cases} \frac{a-3}{a-2} = \frac{3}{4} \rightarrow 4a-12=3a-6 \rightarrow a=6 \\ \frac{a-3}{a-2} = -\frac{3}{4} \rightarrow 4a-12=-3a+6 \rightarrow 7a=18 \\ a = \frac{18}{7} = 2'5... < 4 \end{cases}$$

Como a debe ser mayor que 4, la solución es $a = 6$.

PROBLEMA B.1. Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A . (4 puntos)
- Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)
- El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿ $A^{-1} = 5^{-1} A^t$?

Calculemos A^{-1} . Comprobemos si existe A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$Y, A^{-1} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5} A^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $A^{-1} = 5^{-1} A^t$.

Otra forma de realizar la comprobación es la siguiente:

Partimos de $A^{-1} = 5^{-1} A^t$,

Multiplicamos por la derecha por A , $A^{-1} A = 5^{-1} A^t A$

Como, $A^{-1} A = I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3), $I = 5^{-1} A^t A \rightarrow A^t A = 5 I$.

Comprobemos esta última igualdad.

$$A^t A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 I \quad c.q.c$$

Por tanto, $A^{-1} = 5^{-1} A^t$.

b) ¿ $\lambda \in \mathbb{R}$? / $A - \lambda I$ no es invertible

Calculamos $A - \lambda I$,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Para que $A - \lambda I$ no sea invertible, $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \sqrt{5} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 4(\sqrt{5} - \lambda) = (\sqrt{5} - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 4]$$

Resolvamos la ecuación:

$$(\sqrt{5} - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 4] = 0 \quad \begin{cases} \sqrt{5} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \sqrt{5} \\ (1 - \lambda)^2 + 4 = 0 \rightarrow (1 - \lambda)^2 = -4 \rightarrow 1 - \lambda = \pm\sqrt{-4} \text{ no existe} \end{cases}$$

Solución: $A - \lambda I$ no es invertible para $\lambda = \sqrt{5}$.

c) ¿ $|B|$? / B es una matriz cuadrada, $|B| > 0$ y $B^{-1} = B^t$

Como $B^{-1} = B^t \rightarrow |B^{-1}| = |B^t|$

Por las propiedades de los determinantes, $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$ y $|B^t| = |B|$

Por tanto, $\frac{1}{|B|} = |B| \rightarrow 1 = |B|^2 \rightarrow |B| = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, pero $|B| > 0$, por lo que $|B| = 1$.

Solución: $|B| = 1$.

PROBLEMA B.2. Se da el plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ y los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos A , B y C , (2 puntos) y la posición relativa de los planos σ y π . (2 puntos)
- El área del triángulo de vértices A , B y C . (3 puntos)
- Un punto P del plano π y el volumen del tetraedro cuyos vértices son P , A , B y C . (3 puntos)

Solución:

a) ¿plano σ que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$?

$$\text{Del plano } \sigma \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(1,0,0) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC}(-1,0,3) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano σ será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6(x-1) + 2z + 3y = 0 \rightarrow 6x - 6 + 2z + 3y = 0 \rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Por tanto, $\sigma: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

Posición relativa de σ y π :

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos,

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{Como } \frac{6}{6} = \frac{3}{3} = \frac{2}{2} \neq \frac{-6}{-12}, \text{ los planos } \sigma \text{ y } \pi \text{ son paralelos.}$$

b) ¿Área del triángulo de vértices A , B y C ?

El área del triángulo de vértices A , B y C la calculamos mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{k} + 3\vec{j} = (6, 3, 2)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} 7 = \frac{7}{2} \text{ u.a.}$$

Solución: el área del triángulo de vértices A , B y C es $7/2$ u.a.

c) ¿ $P \in \pi$?

Un punto P del plano π lo obtenemos a partir de la ecuación implícita del plano dando valores a, por ejemplo, x e y y obteniendo el valor de z .

$$\text{Para } x=0, y=0 \rightarrow 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2z - 12 = 0 \rightarrow 2z = 12 \rightarrow z = 6 \rightarrow P(0, 0, 6)$$

El volumen del tetraedro de vértices P, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:

a) Mediante la fórmula: $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} | [\vec{AP} \ \vec{BP} \ \vec{CP}] |$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AP} = (-1, 0, 6) \\ \vec{BP} = (0, -2, 6) \\ \vec{CP} = (0, 0, 3) \end{array} \right\} V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} | [\vec{AP} \ \vec{BP} \ \vec{CP}] | = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |6| = \frac{1}{6} 6 = 1 u^3$$

b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano σ , y la altura la obtenemos sabiendo que $P \in \pi$ y que los planos σ y π son paralelos.

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \text{Área}_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} A_{\text{triángulo } A, B, C} d(P, \sigma)^*$$

$$A_{\text{triángulo } A, B, C} = \frac{7}{2} \quad (\text{del apartado anterior})$$

$$d(P, \sigma) = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{7}{2} \frac{6}{7} = \frac{42}{42} = 1 u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es $1 u^3$.

PROBLEMA B.3. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y = \frac{23-5x}{10-x}$, siendo $0 < x < \frac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Los ingresos obtenidos en un día en función de x . (3 puntos)
- Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. (5 puntos)
- El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. (2 puntos)

Solución:

Datos: x toneladas de acero de baja calidad a 300€/T.

y toneladas de acero de alta calidad a 900€/T.

$$y = \frac{23-5x}{10-x}, 0 < x < \frac{23}{5} = 4'6.$$

a) ¿Ingresos en función de x ?

$$I(x) = 300x + 900 \frac{23-5x}{10-x} \quad 0 < x < \frac{23}{5}$$

b) ¿Ingresos máximo?

Tenemos que estudiar $I'(x)$

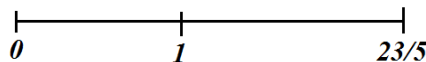
$$\begin{aligned} I'(x) &= 300 + 900 \frac{-5(10-x) - (23-5x)(-1)}{(10-x)^2} = 300 + 900 \frac{-50 + 5x + 23 - 5x}{(10-x)^2} = 300 + 900 \frac{-27}{(10-x)^2} = \\ &= 300 - \frac{24300}{(10-x)^2} \end{aligned}$$

Estudiamos el signo de I' ,

$$300 - \frac{24300}{(10-x)^2} = 0 \rightarrow 300 = \frac{24300}{(10-x)^2} \rightarrow (10-x)^2 = \frac{24300}{300} \rightarrow (10-x)^2 = 81 \rightarrow$$

$$10-x = \pm\sqrt{81} \rightarrow 10-x = \pm 9 \quad \begin{cases} 10-x=9 \rightarrow x=1 \\ 10-x=-9 \rightarrow x=19, 19 > \frac{23}{5} \quad 19 \notin \text{Dom } I(x) \end{cases}$$

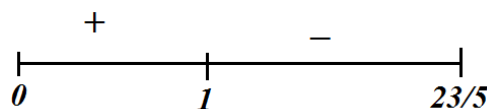
Luego, debemos estudiar el signo de I' en los siguientes intervalos:



$$\text{Para } x = 0'5 \quad I'(0'5) = 300 - \frac{24300}{(10-0'5)^2} = +$$

$$\text{Para } x = 2 \quad I'(2) = 300 - \frac{24300}{(10-2)^2} = -$$

entonces:



Luego, $I(x)$ es creciente en $(0, 1)$ y decreciente en $\left(1, \frac{23}{5}\right)$. En $x = 1$ hay un máximo relativo. Ahora bien, a la izquierda de $x = 1$ la función es creciente y a la derecha decreciente entonces en $x = 1$ hay un máximo absoluto.

$$\text{Para } x = 1, \quad y = \frac{23 - 5 \cdot 1}{10 - 1} = \frac{18}{9} = 2$$

Finalmente, **para que los ingresos de ese día sean máximos se debe vender 1 tonelada de acero de baja calidad y 2 toneladas de acero de alta calidad.**

c) ¿Ingreso máximo?

Del apartado anterior, el ingreso máximo se obtiene para $x = 1$ e $y = 2$, por tanto

$$I(1) = 300 \cdot 1 + 900 \cdot 2 = 2100$$

Solución: el ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día es de 2100€.

Tu Profe al Rescate