

PAU Comunidad Valenciana - Matemáticas II

Septiembre de 2002 - Convocatoria extraordinaria

El examen permite elegir uno de dos ejercicios y resolver tres de sus cuatro problemas. Para que esta solución sirva de repaso completo, desarrollamos los ocho problemas, con sus apartados.

Ejercicio A - Problema 1

Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $M = A - 2BC$. Primero multiplicamos B por C . Cada entrada es el producto escalar de una fila de B con una columna de C :

$$BC = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos por el escalar 2 y después restamos, entrada a entrada, de A :

$$2BC = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}, M = A - 2BC = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}}.$$

b) Justificar que D es invertible y calcular D^{-1} . Para una matriz cuadrada, existe la inversa si su determinante no es cero:

$$\det D = 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Así, D^{-1} existe. Para una matriz 2×2 , usamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$D^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}.$$

c) Hallar X, Y si $DX = M = YD$. De $DX = M$, multiplicamos por D^{-1} por la izquierda. De $YD = M$, multiplicamos por D^{-1} por la derecha:

$$X = D^{-1}M = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 - 147 & -28 + 28 \\ 9 + 63 & 14 - 12 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix}},$$

$$Y = MD^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 + 14 & 63 - 42 \\ 42 + 4 & -147 - 12 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix}}.$$

Comprobamos las dos igualdades pedidas:

$$DX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = M, YD = \begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = M.$$

Ejercicio A - Problema 2

La talla T , medida en metros, sigue una normal de media $\mu = 1.70$ m y desviación típica $\sigma = 0.20$ m. La tipificamos con $Z = (T - \mu)/\sigma$, que sigue una normal estándar.

a) Probabilidad de que la talla supere 1.95 m.

$$z = \frac{1.95 - 1.70}{0.20} = 1.25, P(T > 1.95) = P(Z > 1.25) = 1 - \Phi(1.25).$$

De la tabla normal, $\Phi(1.25) \approx 0.8944$. Por tanto,

$$P(T > 1.95) \approx 1 - 0.8944 = 0.1056, \text{ es decir, } 10.56\%.$$

b) Probabilidad de superar 1.95 m sabiendo que la talla supera 1.65 m. El suceso $T > 1.95$ está contenido en $T > 1.65$, así que la probabilidad condicionada es el cociente entre la probabilidad del suceso más restrictivo y la del condicionante:

$$P(T > 1.95 | T > 1.65) = \frac{P(T > 1.95)}{P(T > 1.65)}.$$

Tipificamos el límite inferior:

$$\frac{1.65 - 1.70}{0.20} = -0.25, \quad P(T > 1.65) = P(Z > -0.25) = 1 - \Phi(-0.25) \approx 1 - 0.4013 = 0.5987.$$

Usamos el resultado del apartado anterior:

$$P(T > 1.95 | T > 1.65) \approx \frac{0.1056}{0.5987} = 0.1764, \text{ aproximadamente } 17.64\%.$$

Ejercicio A - Problema 3

Los planos son

$$\pi_1 : x + y - 6 = 0, \quad \pi_2 : 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0.$$

a) Recta de intersección cuando $\lambda = 4$. Sustituimos el parámetro en π_2 y simplificamos dividiendo entre 2:

$$\pi_1 : x + y - 6 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y + 2z + 1 = 0.$$

Tomamos $z = t$ como variable libre. De la primera ecuación, $y = 6 - x$. Sustituimos en la segunda:

$$x + 2(6 - x) + 2t + 1 = 0 \implies x = 13 + 2t, \quad y = 6 - x = -7 - 2t.$$

La recta, exclusivamente en forma paramétrica, es

$$r : x = 13 + 2t, \quad y = -7 - 2t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al sustituir estas expresiones en ambos planos se obtiene 0, por lo que todos sus puntos pertenecen a la intersección.

b) Valor de λ para que los planos formen 45 grados. Los vectores normales, leídos de los coeficientes de los planos, son $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (2, 4, \lambda)$. El ángulo agudo entre planos cumple

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

Sustituimos los vectores y $\theta = 45^\circ$:

$$\frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot \lambda|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + \lambda^2}} = \frac{6}{\sqrt{2} \sqrt{20 + \lambda^2}} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Multiplicamos por $\sqrt{2} \sqrt{20 + \lambda^2}$, que es positivo:

$$6 = \sqrt{20 + \lambda^2} \implies 36 = 20 + \lambda^2 \implies \lambda = 4 \text{ o } \lambda = -4.$$

Los dos valores satisfacen la ecuación del coseno y producen el ángulo pedido.

Ejercicio A - Problema 4

La función es $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Su dominio es $\mathbb{R}$ porque es un polinomio. Para hallar los extremos calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

El máximo en $x = -4$ y el mínimo en $x = 0$ son puntos críticos. Así,

$$f'(-4) = 48 - 8a + b = 0, \quad f'(0) = b = 0.$$

De la segunda igualdad $b = 0$; al sustituirla en la primera, $48 - 8a = 0$, de donde $a = 6$. Así, la derivada queda factorizada:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x + 4).$$

Sus únicos ceros son $x = -4$ y $x = 0$. Probamos un valor a la izquierda, uno entre ambos puntos y uno a la derecha:

Intervalo o punto	Valor de prueba	$\text{sgn}(f')$	Conclusión
$(-\infty, -4)$	$f'(-5) = 15$	+	Crece
-4	$f'(-4) = 0$	0	Máximo
$(-4, 0)$	$f'(-2) = -12$	-	Decrece
0	$f'(0) = 0$	0	Mínimo
$(0, \infty)$	$f'(1) = 15$	+	Crece

El cambio de signo confirma el máximo en -4 y el mínimo en 0 . También se confirma con la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x + 2a = 6x + 12, \quad f''(-4) = -12 < 0, \quad f''(0) = 12 > 0.$$

Las asíntotas verticales no existen porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Tampoco hay asíntota horizontal ni oblicua: al restar cualquier recta $mx + n$, el término dominante de $f(x) - (mx + n)$ sigue siendo x^3 , que no tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Los valores de los extremos son $f(-4) = -64 + 96 - 6 = 26$ y $f(0) = -6$. Falta imponer $f(1) = 1$:

$$1 + a + b + c = 1 \implies 1 + 6 + 0 + c = 1 \implies c = -6.$$

$$\boxed{a = 6, \quad b = 0, \quad c = -6, \quad f(x) = x^3 + 6x^2 - 6.}$$

Ejercicio B - Problema 1

El sistema depende de λ :

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda, \\ 2x + 3y + 5z = 2, \\ 3x + 5y + \lambda^2 z = 1. \end{cases}$$

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos primero el determinante de A :

$$\det A = (3\lambda^2 - 25) - (2\lambda^2 - 15) + (10 - 9) = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3).$$

Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -3$, $\det A \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada contiene las tres columnas independientes de A , así que $\text{rg}(A|b) = 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado (SCD)**: tiene una única solución.

Estudiamos por separado los valores que anulan el determinante. Un menor de orden 2 de A vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0,$$

por lo que en ambos casos singulares $\text{rg}(A) = 2$. Para ver el rango ampliado, hacemos $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ y $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$:

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 3 & 2-2\lambda \\ 0 & 2 & \lambda^2-3 & 1-3\lambda \end{pmatrix}.$$

Caso $\lambda = -3$. La forma reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

La última fila expresa $0 = -6$, luego el sistema es incompatible. Además, el menor de la ampliada formado por las columnas de x, y, b vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A|b) = 3 \neq \text{rg}(A) = 2$. Por Rouché-Frobenius, es **incompatible (SI)**.

Caso $\lambda = 3$. La forma reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$ aparece tanto en A como en la ampliada, así que ambos rangos son al menos 2. La tercera fila nula en la forma reducida muestra que todos los menores de orden 3 de la ampliada son cero; por tanto,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < 3.$$

Por Rouché-Frobenius, es **compatible indeterminado (SCI)**.

ii) Conjunto de soluciones cuando $\lambda = 3$. Las dos ecuaciones independientes son

$$x + y + z = 3, \quad y + 3z = -4.$$

Tomamos $z = t$. Entonces $y = -4 - 3t$ y $x = 3 - y - z = 7 + 2t$. La solución general es

$$S = \{(7 + 2t, -4 - 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

iii) Vector de S perpendicular a $(1, 1, 2)$. El producto escalar debe ser cero:

$$(7 + 2t, -4 - 3t, t) \cdot (1, 1, 2) = 7 + 2t - 4 - 3t + 2t = 3 + t = 0.$$

Así, $t = -3$, y el vector pedido es

$$(1, 5, -3).$$

Comprobación: $(1, 5, -3) \cdot (1, 1, 2) = 1 + 5 - 6 = 0$.

Ejercicio B - Problema 2

El plano, en forma general, es $\pi : 8x - 4y + z - 3 = 0$, con vector normal $\vec{n} = (8, -4, 1)$. El punto es $P = (1, -3, 7)$.

a) Recta perpendicular por P . La dirección de la recta es el vector normal del plano. En forma paramétrica:

$$r : x = 1 + 8t, \quad y = -3 - 4t, \quad z = 7 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La recta pasa por P , pues al tomar $t = 0$ se obtiene $(1, -3, 7)$. Su vector director es $(8, -4, 1)$, igual al vector normal de π ; por ello es perpendicular al plano. Se deja expresada únicamente en forma paramétrica.

b) Distancia de P al plano. Para $ax + by + cz + d = 0$, usamos

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos los coeficientes y las coordenadas de P :

$$d(P, \pi) = \frac{|8(1) - 4(-3) + 1(7) - 3|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{24}{9} = \boxed{\frac{8}{3} \text{ unidades}}.$$

c) Planos a distancia 3 de π . Los planos buscados son paralelos, así que conservan el mismo vector normal. En forma general escribimos $8x - 4y + z + d = 0$. La distancia entre este plano y π es

$$\frac{|d - (-3)|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = 3 \implies \frac{|d + 3|}{9} = 3 \implies d + 3 = \pm 27.$$

Así, $d = 24$ o $d = -30$, y los dos planos son

$$\boxed{8x - 4y + z + 24 = 0}, \quad \boxed{8x - 4y + z - 30 = 0}.$$

Ejercicio B - Problema 3

Cada visita termina en venta con probabilidad $p = 0.4$ y en no venta con probabilidad $q = 1 - p = 0.6$. Para cinco visitas independientes, el número de ventas X sigue una binomial $X \sim B(5, 0.4)$. La probabilidad de exactamente k ventas es

$$P(X = k) = \binom{5}{k} (0.4)^k (0.6)^{5-k}.$$

a) Ninguna venta.

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} (0.4)^0 (0.6)^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0.07776 = \boxed{0.07776}.$$

b) Exactamente dos ventas. Hay $\binom{5}{2} = 10$ maneras de elegir qué dos clientes compran. Para cada elección, la probabilidad es $(0.4)^2 (0.6)^3$:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} (0.4)^2 (0.6)^3 = 10 \cdot 0.16 \cdot 0.216 = \boxed{0.3456}.$$

c) Exactamente cuatro ventas. Hay $\binom{5}{4} = 5$ maneras de elegir los cuatro clientes que compran:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1 = 5 \cdot 0.0256 \cdot 0.6 = \boxed{0.0768}.$$

Ejercicio B - Problema 4

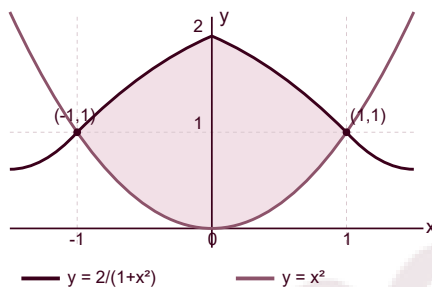
Las curvas son $y = x^2$ y $y = \frac{2}{1+x^2}$. La primera tiene dominio $\mathbb{R}$ por ser polinómica. La segunda también tiene dominio $\mathbb{R}$, porque $1 + x^2 \geq 1 > 0$, así que su denominador nunca se anula.

Puntos de corte. Igualamos las funciones. Como $1 + x^2 > 0$, podemos multiplicar sin cambiar las soluciones:

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2} \implies x^2(1+x^2) = 2 \implies x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Con $u = x^2 \geq 0$, queda $u^2 + u - 2 = (u+2)(u-1) = 0$. La única solución admisible es $u = 1$, es decir, $x = -1$ o $x = 1$. En ambos casos $y = 1$, por lo que se cortan en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

Entre esos puntos la curva superior es $2/(1+x^2)$: por ejemplo, en $x = 0$ vale 2, mientras que $x^2 = 0$. El área se obtiene integrando curva superior menos curva inferior:



$$A = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx.$$

Integramos cada término:

$$\int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \arctan x + C, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\begin{aligned} A &= \left[2 \arctan x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \left(2 \arctan 1 - \frac{1}{3} \right) - \left(2 \arctan(-1) + \frac{1}{3} \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \right) = \boxed{\pi - \frac{2}{3} \approx 2.4749 \text{ unidades}^2}. \end{aligned}$$