

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2016

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Continuidad, tangente e integral

La función está definida por dos expresiones. La primera solo se utiliza cuando $x < 0$, donde $1 - x > 0$ y el logaritmo existe; la segunda está definida para $x \geq 0$. Por tanto, el dominio es $\mathbb{R}$.

a) Continuidad y límite en $-\infty$. En cada intervalo abierto de definición, las expresiones son continuas. Solo hay que comprobar el punto de unión $x = 0$. Por la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln 1}{1} = 0,$$

mientras que $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-x} = 0$. Los dos límites laterales coinciden con el valor de la función, así que f es continua en 0 y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

Para el límite en $-\infty$, hacemos $t = 1 - x$. Cuando $x \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$, y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0,$$

porque el logaritmo crece más despacio que una función lineal. **Conclusión.** f es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) Recta tangente en $x = 2$. Como $2 \geq 0$, usamos $f(x) = xe^{-x}$. La recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Derivando mediante la regla del producto,

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

Así, $f(2) = 2e^{-2}$ y $f'(2) = -e^{-2}$. Sustituyendo en la fórmula,

$$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x - 2) \implies y = \frac{4 - x}{e^2}.$$

Conclusión. La recta tangente es $y = \frac{4 - x}{e^2}$.

c) Integral definida. La expresión de f cambia en 0, así que dividimos el intervalo de integración allí:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx + \int_0^1 xe^{-x} dx.$$

En la primera integral usamos $u = 1 - x$, de modo que $du = -dx$. En la segunda, integramos por partes, tomando $u = x$ y $dv = e^{-x}dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx &= \int_1^2 \frac{\ln u}{u} du = \left[\frac{(\ln u)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2}, \\ \int_0^1 xe^{-x} dx &= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Conclusión. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{(\ln 2)^2}{2} + 1 - \frac{2}{e}$.

Opción A - Ejercicio 2. Ecuaciones matriciales

a) Despeje de X . Como C y D son invertibles, $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$. Llamemos $E = D^{-1}C^{-1}$. La ecuación queda

$$XE = A + X(E - B) = A + XE - XB.$$

Restamos XE en ambos miembros y obtenemos $XB = A$. Multiplicando por B^{-1} a la derecha,

$$X = AB^{-1}.$$

Conclusión. La forma más simple es $X = AB^{-1}$.

b) Cálculo de Y tal que $YB = A$. Calculamos primero el determinante de B para comprobar que es invertible:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Por tanto $Y = AB^{-1}$. La inversa y el producto son

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La igualdad $YB = A$ queda garantizada al haber multiplicado por la inversa de B . **Conclusión.** $Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Opción A - Ejercicio 3. Posición relativa de planos

Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (a, 1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, a, 1)$. Los utilizamos porque las relaciones entre normales permiten estudiar paralelismo y perpendicularidad; además, un vector director de la recta de intersección es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

a) **Planos paralelos.** Para que sean paralelos, sus normales deben ser proporcionales. El producto vectorial es

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1 + a, -1 - a, a^2 - 1).$$

Se anula únicamente para $a = -1$ (el valor $a = 1$ no anula sus dos primeras componentes). Con $a = -1$, los planos son $-x + y - z + 1 = 0$ y $x - y + z - 2 = 0$. Sus normales son opuestas, pero al multiplicar el primero por -1 se obtiene $x - y + z - 1 = 0$, distinto del segundo; son paralelos distintos. **Conclusión.** Los planos son paralelos para $a = -1$.

b) **Planos perpendiculares.** Dos planos son perpendiculares si lo son sus vectores normales, es decir, si su producto escalar es cero:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a + a - 1 = 2a - 1 = 0 \implies a = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. Los planos son perpendiculares para $a = \frac{1}{2}$.

c) **Intersección perpendicular al plano $x = y$.** El plano $x - y = 0$ tiene normal $(1, -1, 0)$. La recta de intersección de π_1 y π_2 es perpendicular a este plano cuando su vector director es paralelo a dicha normal. Igualando la dirección de $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ a un múltiplo de $(1, -1, 0)$, necesitamos $a^2 - 1 = 0$. Los candidatos son $a = 1$ y $a = -1$. Para $a = -1$ los planos son paralelos y no hay recta de intersección. Para $a = 1$, el producto vectorial es $(2, -2, 0)$, paralelo a $(1, -1, 0)$. **Conclusión.** La condición se cumple para $a = 1$.

Opción A - Ejercicio 4. Simétrico de un punto respecto a un plano

Para hallar el simétrico, primero obtenemos la ecuación del plano ABC . Los vectores que generan el plano son

$$\vec{AB} = B - A = (1, -5, 1), \quad \vec{AC} = C - A = (2, -1, 2).$$

Un vector normal se obtiene mediante su producto vectorial:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-9, 0, 9),$$

que podemos simplificar a $\vec{n} = (1, 0, -1)$. Con el punto $A(0, 2, -1)$, la ecuación del plano es

$$1(x - 0) + 0(y - 2) - 1(z + 1) = 0 \implies x - z - 1 = 0.$$

El simétrico P' de P tiene como punto medio con P la proyección ortogonal de P sobre el plano; equivalentemente, se usa

$$P' = P - 2 \frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c).$$

Aquí $(a, b, c, d) = (1, 0, -1, -1)$ y $P = (2, 1, -1)$, luego el numerador vale 2 y $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Por tanto,

$$P' = (2, 1, -1) - 2(1, 0, -1) = (0, 1, 1).$$

Conclusión. El punto simétrico es $P' = (0, 1, 1)$.

Opción B - Ejercicio 1. Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Como A es cuadrada, estudiamos su determinante: si es distinto de cero el sistema tiene solución única; si se anula, compararemos los rangos.

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m-2)(m+2).$$

Si $m \neq \pm 2$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, que coincide con el número de incógnitas. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $m = 2$ o $m = -2$, el determinante se anula. El menor de orden dos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

asegura que $\text{rg}(A) = 2$ en ambos casos. Además, para esos valores, la tercera fila de A es la primera más dos veces la segunda. Si $m = 2$, los términos independientes cumplen también $4 = 1 + 2(-2)$, por lo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Así, los rangos coinciden y son menores que las tres incógnitas: el sistema es compatible indeterminado. Si $m = -2$, la misma combinación daría como término independiente $1 + 2(-2) = -3$, pero la tercera ecuación tiene término independiente 4. Las filas de la ampliada no satisfacen esa relación y $\text{rg}(A^*) = 3$; el sistema es incompatible. **Conclusión.** Es SCD si $m \neq \pm 2$, SCI si $m = 2$ y SI si $m = -2$.

b) Resolución para $m = 0$. Sustituyendo $m = 0$:

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x - y + 2z = -2, \\ 5x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación de la tercera y obtenemos $x + z = \frac{3}{2}$. De la primera, $y = 1 - 3x$. Al sustituirlo en la segunda,

$$x - (1 - 3x) + 2z = -2 \implies 2x + z = -\frac{1}{2}.$$

Restando $x + z = \frac{3}{2}$ resulta $x = -2$, y entonces $z = \frac{7}{2}$ e $y = 7$. **Conclusión.** Para $m = 0$, $(x, y, z) = (-2, 7, \frac{7}{2})$.

c) Resolución para $m = 2$. El sistema es

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1, \\ x - y + 2z = -2, \\ 5x + 3y + 2z = 4. \end{cases}$$

La tercera ecuación es la suma de la primera y dos veces la segunda, así que basta resolver las dos primeras. Al sumarlas se obtiene $4x + 4z = -1$, esto es, $x = -\frac{1}{4} - z$. La segunda da $y = x + 2z + 2 = \frac{7}{4} + z$. Tomando $z = t$ como parámetro,

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{4} - t, \frac{7}{4} + t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $m = 2$, el sistema tiene infinitas soluciones dadas por la expresión anterior.

Opción B - Ejercicio 2. Paralelogramo y lugar geométrico

a) Coplanaridad y paralelogramo. Calculamos los vectores de lados:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (2, -2, -2),$$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (2, -2, -2).$$

Los lados opuestos tienen el mismo vector, por lo que son paralelos e iguales. Además, $D = A + \overrightarrow{AD}$ y $C = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; así, los cuatro vértices pertenecen al plano generado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ que pasa por A . Esto prueba también la coplanaridad. **Conclusión.** $ABCD$ es un paralelogramo y sus cuatro vértices son coplanarios.

b) **Área.** El área del paralelogramo generado por dos lados contiguos es el módulo de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2), \quad A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Conclusión. El área es $2\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

c) **Lugar geométrico.** El centro del paralelogramo es el punto medio de cualquiera de sus diagonales. Usamos la diagonal AC :

$$M = \frac{A + C}{2} = \left(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2)$, que podemos simplificar a $(0, 1, -1)$. La proyección ortogonal de P sobre el plano es M exactamente cuando P está en la recta que pasa por M con dirección normal al plano. Por tanto, el lugar geométrico es

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{9}{2} + t, \\ z = \frac{5}{2} - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 3. Determinación de polinomios

a) **A partir de la tercera derivada.** Si $f'''(x) = 12$, integramos tres veces; los términos constantes de integración se determinan con los tres datos:

$$f''(x) = 12x + C_1, \quad f'(x) = 6x^2 + C_1x + C_2, \quad f(x) = 2x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3.$$

Escribimos $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$. Las condiciones en $x = 1$ dan

$$2 + a + b + c = 3, \quad 6 + 2a + b = 1, \quad 12 + 2a = 4.$$

De la tercera, $a = -4$; de la segunda, $b = 3$; y de la primera, $c = 2$. **Conclusión.** $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

b) **A partir de la segunda derivada.** De $g''(x) = 6$ se obtiene $g(x) = 3x^2 + ax + b$. Aplicamos las dos condiciones integrales:

$$\int_0^1 g(x) dx = 1 + \frac{a}{2} + b = 5, \quad \int_0^2 g(x) dx = 8 + 2a + 2b = 14.$$

Equivalentemente, $a + 2b = 8$ y $a + b = 3$. Restando las ecuaciones, $b = 5$ y $a = -2$. **Conclusión.** $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Opción B - Ejercicio 4. Continuidad y derivabilidad

Para $x > 0$, el signo de $x \ln x$ es el de $\ln x$: es negativo en $(0, 1)$ y positivo en $(1, +\infty)$. Por ello, podemos escribir

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x \ln x, & 0 < x < 1, \\ x \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$

En $x = 0$, $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0$; por la izquierda la función es constantemente cero. Luego es continua en 0. En $x = 1$, ambas expresiones laterales tienden a cero y $f(1) = 0$, así que también es continua en 1.

Para estudiar la derivabilidad en 0, comparamos las derivadas laterales. La izquierda vale 0. La derivada por la derecha se calcula con el cociente incremental:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h \ln h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-\ln h) = +\infty.$$

No existe derivada finita por la derecha y, por tanto, f no es derivable en 0. En $x = 1$, derivamos las expresiones a cada lado:

$$f'_-(1) = [-(\ln x + 1)]_{x=1} = -1, \quad f'_+(1) = [\ln x + 1]_{x=1} = 1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, f tampoco es derivable en 1. **Conclusión.** f es continua en 0 y en 1, pero no es derivable en ninguno de esos dos puntos.