

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2018 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Inversiones

Sean x , y y z los euros invertidos en la cuenta, el depósito y los bonos, respectivamente. El total invertido y los intereses anuales proporcionan las ecuaciones

$$x + y + z = 42000, \quad 0,05x + 0,07y + 0,09z = 2600.$$

Además, los intereses de la cuenta, $0,05x$, son 200 € menos que la suma de los otros dos, de modo que

$$0,05x = 0,07y + 0,09z - 200.$$

Llamemos $S = 0,07y + 0,09z$ a los intereses de las dos últimas inversiones. De las dos ecuaciones de intereses se obtiene $0,05x + S = 2600$ y $0,05x = S - 200$; por tanto $S = 1400$ y $0,05x = 1200$. Así, $x = 24000$. Quedan $y + z = 18000$ y $0,07y + 0,09z = 1400$. Sustituyendo $y = 18000 - z$:

$$0,07(18000 - z) + 0,09z = 1400 \implies 1260 + 0,02z = 1400 \implies z = 7000, \quad y = 11000.$$

Las cantidades satisfacen las tres condiciones del enunciado.

Cuenta: 24000 €; depósito: 11000 €; bonos: 7000 €.

Problema 2 · Extracción de carbón

La extracción anual, en toneladas, está modelizada por

$$f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{t^3}{800}, \quad t \geq 0,$$

donde t es el tiempo en años. Buscamos primero cuándo alcanza su máximo derivando y localizando los puntos críticos:

$$f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{3t^2}{800} = 0 \iff t^2 = 400.$$

En el dominio $t \geq 0$ el único punto crítico es $t = 20$. La derivada es positiva antes de 20 y negativa después; por ello la extracción crece hasta ese año y decrece a partir de él. El valor máximo es

$$f(20) = 30 + 30 - \frac{8000}{800} = 50 \text{ toneladas por año.}$$

b) En el año 40,

$$f(40) = 30 + 60 - \frac{64000}{800} = 10.$$

Al ser exactamente el mínimo exigido, en $t = 40$ la explotación todavía es rentable. c) Para los años posteriores comparamos con el umbral de 10 toneladas:

$$f(t) - 10 = 20 + \frac{3}{2}t - \frac{t^3}{800} = -\frac{(t-40)(t+20)^2}{800}.$$

Si $t > 40$, el primer factor es positivo y $(t+20)^2 > 0$, de modo que $f(t) - 10 < 0$. No existe un periodo posterior rentable: solo se alcanza justo el umbral en el instante $t = 40$.

Máximo: 50 t/año en $t = 20$; $f(40) = 10$ t/año y para $t > 40$ no es rentable.

Problema 3 · Sucesos en un espacio muestral finito

El espacio muestral es $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, con $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$ y $P(e) = \frac{1}{3}$. Como las probabilidades suman 1,

$$P(b) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Los sucesos son $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, d, e\}$, de modo que $\overline{B} = \{a, c\}$ y $\overline{A} = \{d, e\}$. Así, $A \cap B = \{b\}$, $A \cup \overline{B} = \{a, b, c\}$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

$$\text{a)} \quad P(A \cap B) = P(b) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{b)} \quad P(A \cup \overline{B}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{c)} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\emptyset) = 0.$$

Para las condicionadas calculamos también $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ y $P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12}$:

$$\text{d)} \quad P(A | \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1/4}{1/4} = 1, \quad \text{e)} \quad P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{5/12} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\text{a)} \frac{1}{6}; \quad \text{b)} \frac{5}{12}; \quad \text{c)} 0; \quad \text{d)} 1; \quad \text{e)} \frac{2}{5}.$$

Opción B

Problema 1 · Inversa y ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos el determinante para decidir si A tiene inversa:

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 19 - 10 = 19 \neq 0.$$

Así, A^{-1} existe. La traspuesta de la matriz de cofactores da la adjunta, y por la fórmula $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) De $AX = C$, multiplicamos por A^{-1} a la izquierda. Al efectuar la multiplicación,

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que $AX = C$, como requiere la ecuación.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Modelo de deshielo

La función es $f(t) = \frac{10t + 21}{t + 3}$, con $t \geq 0$. Escribimos

$$f(t) = 10 - \frac{9}{t + 3}$$

para leer directamente sus valores, variación y límite. a) Sustituyendo $t = 6$ y $t = 87$:

$$f(6) = 10 - \frac{9}{9} = 9 \text{ km}^2, \quad f(87) = 10 - \frac{9}{90} = \frac{99}{10} = 9,9 \text{ km}^2.$$

b) En el dominio $t \geq 0$, $t + 3 > 0$, y

$$f'(t) = \frac{9}{(t + 3)^2} > 0;$$

la superficie deshelada crece con el tiempo. c) La expresión del otro científico, $g(t) = 10 - \frac{9}{t + 3}$, es exactamente la reescritura de $f(t)$, así que no hay diferencia entre ambas funciones. d) Cuando pasan muchos días, el término $9/(t + 3)$ tiende a cero:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 10 \text{ km}^2.$$

La extensión se aproxima a 10 km^2 desde abajo y no llega a superar ese límite.

$$f(6) = 9 \text{ km}^2; \quad f(87) = 9,9 \text{ km}^2; \quad f \text{ es creciente y tiende a } 10 \text{ km}^2.$$

Problema 3 · Elección de llavero

Los tres llaveros se eligen con la misma probabilidad $1/3$. Como cada uno contiene una única llave correcta, la probabilidad de acertar con la primera llave es $1/5$, $1/4$ o $1/3$, según el llavero. **a)** Sumamos los tres casos posibles, ponderándolos por la probabilidad de elegir cada llavero:

$$P(\text{abre a la primera}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{47}{180}.$$

b) Para invertir la condición usamos Bayes. El numerador es la probabilidad de elegir el llavero verde y abrir a la primera:

$$P(\text{verde} \mid \text{abre a la primera}) = \frac{P(\text{verde})P(\text{abre a la primera} \mid \text{verde})}{P(\text{abre a la primera})} = \frac{(1/3)(1/3)}{47/180} = \frac{20}{47}.$$

c) Si el llavero tiene n llaves, la primera prueba falla con probabilidad $(n-1)/n$. Quedan $n-1$ llaves y una es la correcta; la probabilidad de acertar con la siguiente es $1/(n-1)$. Al multiplicar ambas probabilidades resulta $1/n$. Por ello, al promediar los tres llaveros,

$$P(\text{primera falla y segunda abre}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{47}{180}.$$

$$\text{a) } \frac{47}{180}; \quad \text{b) } \frac{20}{47}; \quad \text{c) } \frac{47}{180}.$$