

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de 2023

Se resuelven las ocho preguntas para ofrecer el desarrollo completo. En la prueba basta con contestar a cuatro.

Pregunta A.1 - Operaciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

a) Determinante de $A^T A$

Multiplicamos $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\det(A^T A) = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 8 + (-2) \cdot 2 = 20 - 16 - 4 = 0.$$

Conclusión. $\det(A^T A) = 0$.

b) Rango de BA

Como B es 2×2 y A es 2×3 ,

$$BA = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}.$$

Si $b \neq 0$, $\det(B) = b^2 \neq 0$, de modo que B es invertible y multiplicar A por B no cambia el rango: $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A) = 2$. Si $b = 0$, la primera fila de BA es nula y la segunda no, por lo que el rango es 1. **Conclusión.** $\text{rg}(BA) = 2$ si $b \neq 0$, y $\text{rg}(BA) = 1$ si $b = 0$.

c) Inversa para $b = 2$

Para $b = 2$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det B = 4 \neq 0.$$

Aplicamos la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Así,

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Para $b = 2$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

d) Potencia B^5 para $b = 1$

Cuando $b = 1$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $N^2 = 0$, en el desarrollo de $(I + N)^5$ todos los términos con N^2 o potencias mayores desaparecen:

$$B^5 = I + 5N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Para $b = 1$, $B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta A.2 - Consumo y optimización

La velocidad v se mide en decenas de km/h y el consumo en litros por cada 100 km. La función es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3}, & 0 \leq v < 3, \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3}, & v \geq 3. \end{cases}$$

Su dominio físico es $v \geq 0$.

a) Consumo mínimo a más de 30 km/h

La condición significa $v > 3$, así que usamos la segunda expresión. Es una parábola abierta hacia arriba; su vértice da el mínimo. También podemos hallarlo derivando:

$$c'(v) = -4 + \frac{2v}{3} = 0 \implies v = 6.$$

Este valor cumple $v > 3$. El consumo correspondiente es

$$c(6) = 14 - 4 \cdot 6 + \frac{6^2}{3} = 2.$$

Conclusión. El vehículo debe circular a $v = 6$, es decir, 60 km/h; el consumo mínimo es 2 L/100 km.

b) Máximo y mínimo para $1 \leq v \leq 8$

En el primer tramo $c'(v) = \frac{5}{3} > 0$, luego el consumo crece hasta $v = 3$. En el segundo,

$$c'(v) = -4 + \frac{2v}{3},$$

que es negativa entre 3 y 6, nula en 6 y positiva entre 6 y 8. Por tanto, para comparar extremos absolutos en el intervalo cerrado evaluamos los extremos, el punto de unión y el punto crítico:

$$c(1) = \frac{5}{3}, \quad c(3) = 5, \quad c(6) = 2, \quad c(8) = 14 - 32 + \frac{64}{3} = \frac{10}{3}.$$

El mayor de estos valores es 5 y el menor es 2. **Conclusión.** El consumo máximo es 5 L/100 km, a $v = 3$ (30 km/h); el mínimo es 2 L/100 km, a $v = 6$ (60 km/h).

Pregunta A.3 - Rectas y proyección ortogonal

El plano $\pi : z = 1$ es horizontal y su vector normal es $(0, 0, 1)$. La recta r pasa por $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (0, 0, 1)$. Su vector director se obtiene restando las coordenadas:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 0).$$

Por tanto, la recta en forma paramétrica es $r : x = 1 - t, y = 1 - t, z = 1, t \in \mathbb{R}$.

a) Pertenencia al plano

Los dos puntos pertenecen a π si sus coordenadas z verifican $z = 1$. Tanto P como Q tienen tercera coordenada 1. **Conclusión.** $P, Q \in \pi$.

b) Paralela a r en el plano $z = 0$

Una recta paralela a r debe tener un vector director proporcional a $(-1, -1, 0)$. Tomando como punto $(0, 0, 0)$, que pertenece al plano $z = 0$, obtenemos la recta paramétrica **Conclusión.** $s : x = t, y = t, z = 0, t \in \mathbb{R}$.

c) Proyección igual a r y ángulo $\frac{\pi}{4}$

La proyección ortogonal sobre $z = 1$ conserva las coordenadas x, y y convierte la coordenada z en 1. Para que la proyección sea r , elegimos un vector director cuya parte paralela al plano tenga dirección $(1, 1, 0)$. Tomamos $\vec{v} = (1, 1, \sqrt{2})$ y construimos la recta por P :

$$\ell : x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + \sqrt{2}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al proyectar sus puntos sobre $z = 1$, se obtiene $(1 + t, 1 + t, 1)$, que recorre la misma recta r .

Comprobamos el ángulo entre ℓ y r mediante sus vectores directores $\vec{v} = (1, 1, \sqrt{2})$ y $\vec{d} = (-1, -1, 0)$:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{d}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{d}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$. **Conclusión.** Una recta válida es $\ell : x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1 + \sqrt{2}t$.

Pregunta A.4 - Probabilidades condicionadas

Sabemos que $P(A) = 0,5$, $P(A | B) = 0,625 = \frac{5}{8}$ y $P(A \cup B) = 0,65$.

a) Cálculo de $P(B)$ y $P(A \cap B)$

Usamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Además, la probabilidad condicionada indica que

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = \frac{5}{8}P(B).$$

Si llamamos $p = P(B)$, entonces

$$0,65 = 0,5 + p - \frac{5}{8}p \implies 0,15 = \frac{3}{8}p \implies p = 0,4.$$

Así, $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \cdot 0,4 = 0,25$. **Conclusión.** $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,25$.

b) Condicionadas a $A \cup B$

Como $A \subseteq A \cup B$, se tiene $A \cap (A \cup B) = A$. Análogamente, $A \cap B$ también está contenido en la unión. Aplicamos la fórmula de probabilidad condicionada:

$$P(E | A \cup B) = \frac{P(E \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}.$$

Por ello,

$$P(A | A \cup B) = \frac{0,5}{0,65} = \frac{10}{13}, \quad P(A \cap B | A \cup B) = \frac{0,25}{0,65} = \frac{5}{13}.$$

Conclusión. Las probabilidades son $\frac{10}{13}$ y $\frac{5}{13}$, respectivamente.

Pregunta B.1 - Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes A y la ampliada A^* son

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante:

$$\det A = -k(2k - 3).$$

Si $k \neq 0, \frac{3}{2}$, $\det A \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 3$. Como la matriz ampliada no puede tener rango mayor que 3, ambos rangos son 3; por Rouché-Frobenius hay una única solución (SCD).

Para los valores que anulan el determinante, analizamos por separado. Si $k = 0$, las dos últimas ecuaciones tienen el mismo lado izquierdo pero distintos términos independientes:

$$-y - z = 0, \quad -y - z = 3.$$

El sistema es incompatible: $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$ (SI).

Si $k = \frac{3}{2}$, reducimos el sistema ampliado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

De aquí, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$; por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

b) Solución para $k = 3$

Sustituyendo $k = 3$, podemos despejar primero $y = 2z - 3$ de la tercera ecuación y $x = z - 1$ de la segunda. En la primera:

$$-2(z - 1) + (2z - 3) + 3z = 1 \implies z = \frac{2}{3}.$$

Luego $x = -\frac{1}{3}$ e $y = -\frac{5}{3}$. **Conclusión.** Para $k = 3$, $(x, y, z) = (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

c) Solución para $k = \frac{3}{2}$ y $x = 2$

La forma escalonada anterior equivale a

$$x - z = -2, \quad y - \frac{1}{2}z = -3.$$

Tomando $z = t$, las soluciones son $x = t - 2$, $y = \frac{1}{2}t - 3$, $z = t$. Para $x = 2$, resulta $t = 4$, luego $y = -1$ y $z = 4$. **Conclusión.** Una solución particular con $x = 2$ es $(2, -1, 4)$.

Pregunta B.2 - Derivabilidad y área entre curvas

a) Derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

La función $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ es polinómica y, por tanto, derivable en $\mathbb{R}$. Para estudiar dónde el valor absoluto puede afectar a la derivabilidad, calculamos sus ceros:

$$2 + 2x - 2x^2 = 0 \iff x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Son raíces simples, pues $f'(x) = 2 - 4x$ no se anula en ninguna de ellas. Por tanto, f cambia de signo en cada cero; el valor absoluto forma una punta en esos puntos y h no es derivable allí. En los demás puntos, h coincide localmente con f o con $-f$, ambas derivables. **Conclusión.** h es derivable en $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$, y no lo es en esos dos puntos.

b) Área entre f y g en $[0, 2]$

Restamos las funciones para hallar los puntos de corte y comparar cuál está por encima:

$$f(x) - g(x) = -2x^3 - 6x^2 + 8x = -2x(x+4)(x-1).$$

En $[0, 2]$, se cortan en $x = 0$ y $x = 1$. En $(0, 1)$, por ejemplo en $x = \frac{1}{2}$, $f - g > 0$; en $(1, 2)$, por ejemplo en $x = \frac{3}{2}$, $f - g < 0$. Por eso debemos separar el área:

$$A = \int_0^1 (f - g) dx + \int_1^2 (g - f) dx.$$

Una primitiva de $f - g = -2x^3 - 6x^2 + 8x$ es

$$F(x) = -\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 4x^2.$$

Entonces

$$A = [F(x)]_0^1 - [F(x)]_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = 11.$$

Conclusión. El área total entre las curvas es 11 unidades cuadradas.

Pregunta B.3 - Plano y rectas

El plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ tiene normal $\vec{n} = (1, 3, 2)$, con $\|\vec{n}\|^2 = 14$.

a) Punto del plano más cercano al origen

La perpendicular desde el origen al plano tiene dirección $\vec{n}$. Para hallar su intersección con el plano, tomamos $X(t) = t(1, 3, 2)$ y sustituimos:

$$t + 9t + 4t + 14 = 0 \implies t = -1.$$

Conclusión. El punto del plano más próximo al origen es $(-1, -3, -2)$.

b) Proyección ortogonal del eje OZ sobre π

Un punto cualquiera del eje OZ es $X(t) = (0, 0, t)$. Su proyección ortogonal sobre el plano se obtiene restando el componente normal:

$$H(t) = X(t) - \frac{\vec{n} \cdot X(t) + 14}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (0, 0, t) - \frac{t+7}{7} (1, 3, 2) = \left(-\frac{t+7}{7}, -\frac{3(t+7)}{7}, \frac{5t-14}{7} \right).$$

Esta familia de puntos recorre una recta que pasa por $H(0) = (-1, -3, -2)$, con vector director proporcional a $(-1, -3, 5)$. Su forma paramétrica es **Conclusión.** $s : x = -1 - t, \quad y = -3 - 3t, \quad z = -2 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$

c) Recta contenida en π , perpendicular a r y secante a OZ

La recta r queda definida por $x = 2$ y $z = 5$; en forma paramétrica, $r : x = 2, y = t, z = 5, t \in \mathbb{R}$. Su vector director es $(0, 1, 0)$. Si una recta de dirección $\vec{v}$ está contenida en π , debe cumplirse $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$; además, para ser perpendicular a r , debe cumplirse $\vec{v} \cdot (0, 1, 0) = 0$. El vector $\vec{v} = (-2, 0, 1)$ verifica ambas condiciones.

El punto donde esta recta corta al eje OZ tiene $x = y = 0$. Al imponerlo en el plano:

$$2z + 14 = 0 \implies z = -7.$$

Por tanto, pasa por $(0, 0, -7)$ y tiene dirección $(-2, 0, 1)$. **Conclusión.** La recta buscada es $x = -2t, y = 0, z = -7 + t, t \in \mathbb{R}$.

Pregunta B.4 - Distribución binomial y normal

La probabilidad de aprobar a la primera es 0,65; por tanto, la probabilidad de necesitar más de un intento es $q = 0,35$. En cada apartado, el número de personas que cumplen la condición indicada sigue una binomial porque se consideran ensayos independientes con la misma probabilidad.

a) Exactamente tres necesitaron más de un intento

Sea $X \sim \text{Bin}(10, 0,35)$ el número de personas que necesitaron más de un intento. La probabilidad de exactamente tres es

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,35)^3 (0,65)^7 \approx 0,2522.$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente 0,2522.

b) Al menos una necesitó más de un intento

Calculamos el complementario: que ninguna necesitara más de un intento equivale a que las diez aprobaran a la primera. Por independencia,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,65)^{10} \approx 0,9865.$$

Conclusión. La probabilidad de que al menos una necesitara más de un intento es aproximadamente 0,9865.

c) Al menos la mitad aprobó a la primera

Sea $Y \sim \text{Bin}(60, 0,65)$ el número que aprueba a la primera. Para aproximarla por una normal, calculamos

$$\mu = np = 39, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{60 \cdot 0,65 \cdot 0,35} = \sqrt{13,65} \approx 3,695.$$

«Como mínimo la mitad» significa $Y \geq 30$. Aplicando la corrección de continuidad:

$$P(Y \geq 30) \simeq P(N \geq 29,5), \quad N \sim N(39, 3,695).$$

Tipificando, $z = \frac{29,5-39}{3,695} \approx -2,57$, y con la tabla normal

$$P(N \geq 29,5) = P(Z \geq -2,57) = \Phi(2,57) \approx 0,9949.$$

Conclusión. La probabilidad aproximada es 0,9949, es decir, un 99,49 %.