

Se resuelven ambas opciones de los apartados 1 y 2 y el problema común.

Problema 1 · Precios y publicidad

A) Sean l, p, w los precios navideños de un libro, una pluma y un reloj. Las tres compras del enunciado dan:

$$2l + 3p + w = 225, \quad 3(l - 5) + 3(p - 5) + (w - 5) = 225, \quad 3(l + 5) + 3(p + 5) = 225.$$

La segunda ecuación representa tres libros, tres plumas y un reloj en rebajas; la tercera, tres libros y tres plumas en febrero. Al simplificar, obtenemos $2l + 3p + w = 225$, $3l + 3p + w = 260$ y $l + p = 65$. Restar las dos primeras proporciona $l = 35$; entonces $p = 30$ y $w = 65$.

$\text{Libro: } 35 \text{ €; } \text{pluma: } 30 \text{ €; } \text{reloj: } 65 \text{ €.}$

B) Sean x e y los euros invertidos en las empresas A y B. El incremento de seguidores se modeliza con $S = 0,10x + 0,07y$ y las restricciones son

$$x + y \leq 10000, \quad y \geq 2000, \quad x \leq 6000, \quad x \geq y, \quad x, y \geq 0.$$

Como el rendimiento por euro es mayor en A, fijamos $x = 6000$ y asignamos a B el máximo compatible con el presupuesto, $y = 4000$; se cumplen $y \geq 2000$ y $x \geq y$. El aumento es $0,1(6000) + 0,07(4000) = 880$.

$\text{Invertir } 6000 \text{ € en A y } 4000 \text{ € en B; } S_{\max} = 880 \text{ seguidores.}$

Problema 2 · Temperatura de un motor y función racional

A) En el tramo inicial $T(r) = r/4 + 25$, así que $T(100) = 50$. Para el tramo $T(r) = Ar^2 + B$, la continuidad y la derivada en $r = 1600$ dan

$$10000A + B = 50, \quad T'(1600) = 3200A = 4.$$

De aquí, $A = 1/800$ y $B = 75/2$. La derivada vale $1/4$ en el primer tramo y $r/400 > 0$ para $r > 100$ en el segundo; la temperatura crece estrictamente. Para $r \geq 0$ tiene mínimo absoluto $T(0) = 25$ y no tiene máximo, pues crece sin cota.

Las revoluciones durante el uso son $r(m) = 5m - 0,15m^2$, con $0 \leq m \leq 30$. Es una parábola cóncava: su vértice está en

$$m = -\frac{5}{2(-0,15)} = \frac{50}{3}, \quad r\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{125}{3}.$$

En los extremos del intervalo, $r(0) = 0$ y $r(30) = 15$, por lo que el mínimo es 0 en $m = 0$. Ambos valores de revoluciones quedan por debajo de 100, y se usa $T = r/4 + 25$:

$$T(0) = 25, \quad T\left(\frac{125}{3}\right) = \frac{425}{12}.$$

$A = \frac{1}{800}, B = \frac{75}{2}; \quad T_{\min} = 25 \text{ en } r = 0; \quad r_{\max} = \frac{125}{3} \text{ en } m = \frac{50}{3}, \quad T = \frac{425}{12}.$

B) Reducimos la expresión a una sola fracción:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{x^3}{1-x^2}.$$

El dominio excluye $x = \pm 1$ y el único corte con ambos ejes es $(0, 0)$. La función tiene asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$. La división algebraica

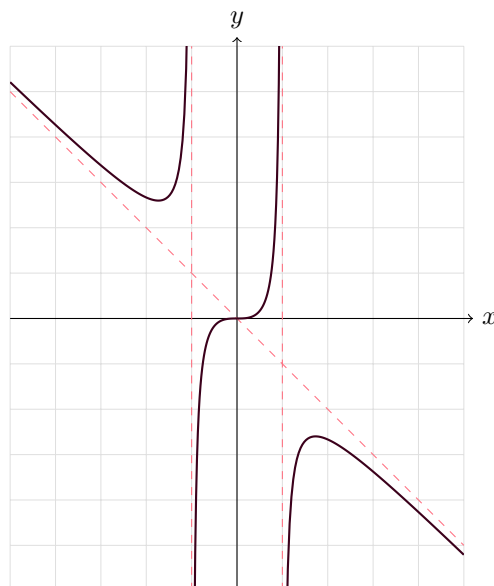
$$f(x) = -x - \frac{x}{x^2 - 1}$$

muestra que no hay asíntota horizontal y que la oblicua es $y = -x$. La derivada es

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Su signo es negativo si $|x| > \sqrt{3}$ y positivo si $|x| < \sqrt{3}$ (salvo que se anula en $x = 0$). Así, decrece en $(-\infty, -\sqrt{3})$, crece en $(-\sqrt{3}, -1)$ y en $(-1, 1)$, sigue creciendo en $(1, \sqrt{3})$ y decrece en $(\sqrt{3}, +\infty)$. Hay un mínimo local en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo local en $x = \sqrt{3}$:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; \quad AV : x = \pm 1; \quad AO : y = -x; \quad \text{extremos } \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Problema 3 · Prueba diagnóstica

Sea D «tener artritis» y $+$ «prueba positiva». Se tiene $P(D) = 1/145$, $P(+ | D) = 0,96$ y $P(- | D^c) = 0,94$; por tanto $P(+ | D^c) = 0,06$.

$$\text{a) } P(D \cap -) = \frac{1}{145} \cdot 0,04 = \frac{1}{3625}.$$

Para invertir la condición en el apartado b), aplicamos Bayes:

$$P(D | +) = \frac{0,96/145}{0,96/145 + 0,06 \cdot 144/145} = 0,1.$$

La prueba acierta si hay enfermedad y da positivo, o si no la hay y da negativo:

$$P(\text{acierto}) = \frac{0,96 + 0,94 \cdot 144}{145} = \frac{3408}{3625}.$$

$$P(D \cap -) = \frac{1}{3625}; \quad P(D | +) = 0,1; \quad P(\text{acierto}) = \frac{3408}{3625}.$$