

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2015

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Discusión de un sistema

Escribimos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

El determinante de A es

$$\det A = -(m-2)(m-1).$$

Si $m \neq 1, 2$, el determinante no se anula, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y, por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $m = 1$ o $m = 2$, el rango de A es 2: en $m = 1$, por ejemplo, el menor de las dos primeras filas y columnas primera y tercera vale -4 ; en $m = 2$, el menor de esas filas y las dos primeras columnas vale 2. Si $m = 1$, la combinación $7F_1 - F_2 + 4F_3$ tiene todos sus coeficientes nulos, pero no los términos independientes ($-4 \neq 0$); por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible. Si $m = 2$, la tercera ecuación es la opuesta de la primera, incluidos sus términos independientes; entonces $\text{rg}(A^*) = 2$, igual que $\text{rg}(A)$ y menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado. **Conclusión.** El sistema es SCD si $m \neq 1, 2$, SI si $m = 1$ y SCI si $m = 2$.

b) Resolución para $m = 0$. Al sustituir $m = 0$, queda

$$z = 0, \quad x + 3z = 4, \quad 2x - 2y - z = 0.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $z = 0$ y $x = 4$; la tercera da $y = 4$. **Conclusión.** Para $m = 0$, $(x, y, z) = (4, 4, 0)$.

c) Resolución para $m = 2$. En este caso la tercera ecuación es dependiente de la primera, así que tomamos $z = t$ como parámetro y resolvemos las dos primeras:

$$-2x + 2y + z = 0, \quad x - 2y + 3z = 4.$$

Al sumar la primera ecuación dividida entre -2 con la segunda, o resolver el sistema en x, y , se obtiene $x = 4z - 4$ e $y = \frac{7}{2}z - 4$. Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(4t - 4, \frac{7}{2}t - 4, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $m = 2$, las soluciones forman la familia anterior.

Opción A - Ejercicio 2. Distancia entre rectas

Las rectas pasan por $P = (2, -1, 0)$ y $Q = (1, 0, -1)$, respectivamente, con vectores directores

$$\vec{u} = (1, \lambda, -2), \quad \vec{v} = (2, 4, 2).$$

La distancia entre dos rectas alabeadas se calcula mediante

$$d(r, s) = \frac{|(Q - P) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Aquí $Q - P = (-1, 1, -1)$ y

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2\lambda + 8, -6, 4 - 2\lambda), \quad (Q - P) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -18.$$

Por tanto,

$$d(r, s) = \frac{18}{\sqrt{(2\lambda + 8)^2 + 36 + (4 - 2\lambda)^2}} = \frac{9}{\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29}}.$$

a) Igualamos esta expresión al valor indicado, $\frac{9}{\sqrt{59}}$:

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 59 \implies (\lambda + 5)(\lambda - 3) = 0.$$

De las dos raíces, solo $\lambda = 3$ cumple $\lambda > 0$. **Conclusión.** El valor pedido es $\lambda = 3$.

b) La recta que pasa por P y Q tiene vector director $Q - P = (-1, 1, -1)$. Para que r sea perpendicular a ella, sus vectores directores deben tener producto escalar nulo:

$$(1, \lambda, -2) \cdot (-1, 1, -1) = -1 + \lambda + 2 = 0 \implies \lambda = -1.$$

Conclusión. La condición de perpendicularidad se cumple para $\lambda = -1$.

Opción A - Ejercicio 3. Monotonía y raíz de un polinomio

La función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ es polinómica, luego su dominio es $\mathbb{R}$. Derivamos:

$$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 = 2(6x^2 + 3x + 1).$$

El discriminante del trinomio es $3^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = -15 < 0$ y su coeficiente principal es positivo; por ello $6x^2 + 3x + 1 > 0$ para todo x . Así, $f'(x) > 0$ en todo $\mathbb{R}$ y f es estrictamente creciente.

b) **Existencia y unicidad de una solución real.** Al ser un polinomio, f es continua. Además,

$$f(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2 < 0, \quad f(0) = 1 > 0.$$

Por el teorema de Bolzano, existe una raíz en $(-1, 0)$. Como f es estrictamente creciente, no puede tener más de una raíz. **Conclusión.** La ecuación tiene una única solución real y está localizada en el intervalo $(-1, 0)$, de longitud 1.

Opción A - Ejercicio 4. Integral y límites

Una primitiva de $(1 - x)e^{-x}$ es xe^{-x} , porque $(xe^{-x})' = (1 - x)e^{-x}$. Por tanto,

$$\int_1^4 (1 - x)e^{-x} dx = [xe^{-x}]_1^4 = \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e}.$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, el factor exponencial e^{-x} tiende a cero más deprisa de lo que crece el factor lineal, de modo que el producto tiende a cero. Cuando $x \rightarrow -\infty$, tanto $1 - x$ como e^{-x} tienden a $+\infty$, y el producto diverge a $+\infty$. **Conclusión.** $\int_1^4 (1 - x)e^{-x} dx = \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^{-x} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^{-x} = +\infty$.

Opción B - Ejercicio 1. Función definida a trozos

Para $x > 0$, $f(x) = a + x \ln x$; para $x \leq 0$, $f(x) = x^2 e^x$. En $x = 0$, $f(0) = 0$ y la continuidad exige que el límite por la derecha coincida con ese valor. Como $x \ln x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0^+$, el límite derecho es a . Así, la función es continua en todo $\mathbb{R}$ exactamente cuando $a = 0$.

Derivamos en cada rama:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x > 0, \\ e^x(x^2 + 2x), & x < 0. \end{cases}$$

En $x = 0$, si $a \neq 0$ la función no es continua y, por ello, no puede ser derivable. Si $a = 0$, la derivada izquierda vale

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 e^h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h e^h = 0,$$

mientras que el cociente incremental por la derecha es $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \ln h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \ln h = -\infty$. Por tanto, tampoco es derivable en 0 cuando es continua.

En el intervalo $[-1, 0]$ se usa $x^2 e^x$. Una primitiva es $e^x(x^2 - 2x + 2)$, de modo que

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = [e^x(x^2 - 2x + 2)]_{-1}^0 = 2 - \frac{5}{e}.$$

Conclusión. La función es continua en todo $\mathbb{R}$ si y solo si $a = 0$; no es derivable en 0 para ningún valor de a , y la integral vale $2 - \frac{5}{e}$.

Opción B - Ejercicio 2. Planos, recta y simetría

Los vectores normales de π_1 , π_2 y π_3 son, respectivamente, $(1, 0, -1)$, $(0, m, -6)$ y $(1, 1, -m)$. Como los tres planos pasan por el origen, su intersección es una recta cuando la matriz de normales tiene rango 2.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad \det N = -m^2 + m + 6 = -(m-3)(m+2).$$

El menor formado por las filas primera y segunda y las columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

por lo que el rango de la matriz de normales es al menos 2 para todo m . El determinante se anula para $m = 3$ o $m = -2$; en esos dos casos el rango es exactamente 2. La intersección de los tres planos tiene entonces dimensión $3 - 2 = 1$ y es una recta. Para los demás valores el rango es 3 y la intersección común se reduce al origen. **Conclusión.** Los tres planos contienen una recta común para $m = 3$ o $m = -2$.

b) Plano por P perpendicular a la recta común de π_1 y π_2 para $m = 3$. Un vector director de la intersección se obtiene mediante el producto vectorial de las normales:

$$(1, 0, -1) \times (0, 3, -6) = (0, 6, 3) \sim (0, 2, 1).$$

Un plano perpendicular a esa recta tiene normal paralela a su vector director. Usamos el punto $P = (-1, -1, 1)$:

$$(0, 2, 1) \cdot (x + 1, y + 1, z - 1) = 0 \implies 2y + z + 1 = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $2y + z + 1 = 0$.

c) Distancia de Q al simétrico P' de P respecto a π_1 . El plano π_1 tiene normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$ y ecuación $x - z = 0$. La fórmula de reflexión respecto al plano $\vec{n} \cdot X + d = 0$ es

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n} \cdot P + d}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $d = 0$, $\vec{n} \cdot P = -2$ y $\|\vec{n}\|^2 = 2$, luego

$$P' = (-1, -1, 1) - 2 \frac{-2}{2} (1, 0, -1) = (-1, -1, 1) + 2(1, 0, -1) = (1, -1, -1).$$

Así,

$$d(Q, P') = \sqrt{(1-1)^2 + (0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}.$$

Conclusión. La distancia pedida es $\sqrt{10}$.

Opción B - Ejercicio 3. Propiedades de determinantes

Denotemos por R_1, R_2, R_3 las filas de la matriz cuyo determinante vale 3.

a) En la matriz pedida, las columnas son $2(C_1 - C_2)$, C_3 y $5C_2$, donde C_1, C_2, C_3 son las columnas originales. Sacamos los factores 2 y 5. El determinante restante, $\det(C_1 - C_2, C_3, C_2)$, es $-\det(C_1, C_2, C_3)$: el término con dos columnas iguales se anula y el intercambio de las columnas segunda y tercera cambia el signo. Por ello, el determinante vale

$$2 \cdot 5 \cdot (-3) = -30.$$

Conclusión. El determinante del apartado a) es -30 .

b) Sea T la transformación que multiplica por 2 la tercera columna. Entonces $\det T(M) = 2 \det M = 6$. La matriz pedida se obtiene de $T(M)$ sustituyendo sus filas por $R_1 - R_3$, $2R_3$ y R_2 , respectivamente. Restar una fila a otra no altera el determinante; el intercambio de las filas segunda y tercera cambia el signo, y multiplicar una fila por 2 duplica el determinante. Por tanto,

$$\det = -2 \cdot \det T(M) = -12.$$

Conclusión. El determinante del apartado b) es -12 .

Opción B - Ejercicio 4. Matrices que conmutan

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La condición $AB = BA$ exige

$$AB = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas correspondientes, obtenemos $c = b$ y $a = 3b + d$. La otra igualdad no aporta una condición nueva. Así, a y b pueden elegirse libremente y $d = a - 3b$. **Conclusión.** Todas las matrices que conmutan con A son $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a - 3b \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.