

CATALUÑA · PAU 2018 · ORDINARIA

Matemáticas II

12 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) 1 punto

Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.

b) 1 punto

Encuentre los valores de t para los cuales la matriz $N \cdot M$ es invertible.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3, \text{ para } m \in \mathbb{R}. \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$$

a) 1 punto

Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.

b) 1 punto

Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r .

b) 1 punto

Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x + y = -2$ y $\pi_2 : x - z = 1$.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Sean el plano de ecuación $\pi : x + y - z = 0$ y el punto $P = (2, 3, 2)$.

a) 1 punto

Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano π .

b) 1 punto

Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P .

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.

b) 1 punto

Calcule, si los hay, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Sea la función $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) 1 punto

Calcule los valores de a y de b que hacen que la función tenga un extremo relativo en el punto $(1, e)$.

b) 1 punto

Para el caso $a = 3$ y $b = 5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

a) 1 punto

Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r .

b) 1 punto

Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por P , Q y R , encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Sabemos que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Sabemos también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

a) 1 punto

Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.

b) 1 punto

Calcule $\int_{-3}^2 f'(x)dx$.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) 1 punto

Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.

b) 1 punto

A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Sean las rectas $r_1 : x - 1 = \frac{y-2}{-1} = z - 5$ y $r_2 : (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 .

b) 1 punto

Diga qué condición se debe cumplir para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 . Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 .

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la figura siguiente que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de una manera automática:

a) 1 punto

Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.

b) 1 punto

¿Qué valor se debería poner en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuese incompatible?

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) 1 punto

Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de k la matriz $A + kI$ tiene inversa.

Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$.

b) 1 punto

Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, en la que A^T es la matriz transpuesta de la matriz A .

Tu Profe al Rescate