

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor del determinante de la matriz $S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 puntos) y la matriz S^{-1} ,

que es la matriz inversa de la matriz S . (2 puntos). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz S sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1} . (1 punto).

b) El determinante de la matriz $(4(T^2))^{-1}$, sabiendo que T es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz T . (3 puntos).

c) La solución a de la ecuación $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$. (2 puntos).

Solución:

a) Calculamos $|S|$ por la regla de Sarrus,

$$|S| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 + 2 + 1 - 6 + 10 = 20$$

Como $|S| \neq 0 \rightarrow \exists S^{-1}$

Calculamos S^{-1} por el método de los adjuntos,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -13 & 11 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 13 & 11 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$S^{-1} = \frac{1}{|S|} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{20} & \frac{13}{20} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-6}{20} & \frac{11}{20} & \frac{-1}{20} \\ \frac{4}{20} & \frac{-4}{20} & \frac{4}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{13}{20} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-3}{10} & \frac{11}{20} & \frac{-1}{20} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Por tanto: $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 13/20 & -3/20 \\ -3/10 & 11/20 & -1/20 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

La relación pedida es: Si S es una matriz cuadrada cuyo determinante es no nulo, entonces admite matriz inversa.

b) Sabemos que T es una matriz 3×3 y que $|T| = 20$, hay que calcular $\left| (4(T^2))^{-1} \right|$

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|MN| = |M||N|$, que si M es $n \times n$ $|\alpha M| = \alpha^n |M|$ y que $|M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$. Apliquemos estas propiedades para calcular el determinante pedido,

$$\left| (4(T^2))^{-1} \right| = \frac{1}{|4(T^2)|} = \frac{1}{|4TT|} = \frac{1}{|4T||T|} = \frac{1}{4^3 |T||T|} = \frac{1}{4^3 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{1}{25600}$$

c) La ecuación matricial planteada da lugar a 9 ecuaciones. Ahora bien, no es necesario escribir las ecuaciones que son identidades, por ejemplo, $a = a$, $-3 = -3$, etc.

Por lo tanto, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = a + 1 \\ a + 1 = a^2 - 1 \\ a^2 + 4 = 4a \\ 4a = a^2 + 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Como quiera que la primera} \\ \text{ecuación es la segunda y lo} \\ \text{mismo ocurre con la tercera y} \\ \text{cuarta, el sistema queda} \\ \text{reducido a:} \end{array} \quad \begin{cases} a^2 - 1 = a + 1 \\ a^2 + 4 = 4a \end{cases}$$

Como es un sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, resolvemos cada una de las ecuaciones y las soluciones del sistema serán aquellas que cumplan ambas ecuaciones.

$$a^2 - 1 = a + 1 \rightarrow a^2 - 1 - a - 1 = 0 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow$$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} a_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ a_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$a^2 + 4 = 4a \rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow$$

$$a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La solución que cumple ambas ecuaciones es $a = 2$, esta es la solución del sistema.

Solución: La solución de la ecuación matricial planteada es $a = 2$.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Se dan los puntos $A = (1, 5, 7)$ y $B = (3, -1, -1)$. Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta r que pasa por los puntos A y B , sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto A y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A y B . (4 puntos distribuidos en 2 puntos por cada plano).
- La distancia entre los planos π_1 y π_2 . (2 puntos).
- Las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos A y B , (2 puntos), y los puntos de la recta r que están a distancia 3 del punto $C = (1, 0, 1)$. (2 puntos).

Solución:

- a) Como los planos pedidos son perpendiculares a la recta r , para hallar las ecuaciones de estos planos necesitamos conocer un vector director de la recta r ,

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (3, -1, -1) - (1, 5, 7) = (2, -6, -8) \approx (1, -3, -4)$$

Ecuación de π_1 , considerando que $\pi_1 \perp r$ y $A \in \pi_1$,

$$\text{como } \pi_1 \perp r \rightarrow \pi_1: x - 3y - 4z + D = 0$$

$$\text{como } A \in \pi_1 \rightarrow 1 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 + D = 0; 1 - 15 - 28 + D = 0; -42 + D = 0; D = 42$$

$$\text{Por tanto, } \pi_1: x - 3y - 4z + 42 = 0$$

Ecuación de π_2 , considerando que $\pi_2 \perp r$ y $PM(\overline{AB}) \in \pi_2$,

$$\text{como } \pi_2 \perp r \rightarrow \pi_2: x - 3y - 4z + D = 0$$

$$\text{calculemos } PM(\overline{AB}) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{7-1}{2} \right) = (2, 2, 3)$$

$$\text{como } PM(\overline{AB}) \in \pi_2 \rightarrow 2 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + D = 0; 2 - 6 - 12 + D = 0; -16 + D = 0; D = 16$$

$$\text{Por tanto, } \pi_2: x - 3y - 4z + 16 = 0$$

- b) Como los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a la recta r , son paralelos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\pi_1, \pi_2) &= d(P_{\pi_1}, \pi_2) = \left\{ \text{como punto del plano } \pi_1 \text{ tomamos el } A = (1, 5, 7) \right\} = \frac{|1 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 + 42|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} = \\ &= \frac{|1 - 15 - 28 + 42|}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{|-26|}{\sqrt{26}} = \frac{26}{\sqrt{26}} = \frac{26 \sqrt{26}}{\sqrt{26} \sqrt{26}} = \frac{26 \sqrt{26}}{26} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\text{Solución, } d(\pi_1, \pi_2) = \sqrt{26} \text{ u.l.}$$

c) Ecuación de la recta r .

Esta recta pasa por los puntos A y B y en el apartado a) obtuvimos su vector director, luego:

$$r: \begin{cases} \text{Punto } A = (1, 5, 7) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = (1, -3, -4) \end{cases}$$

Las ecuaciones de la recta r serán:

E. vectorial $r: (x, y, z) = (1, 5, 7) + \lambda(1, -3, -4) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

E. paramétrica $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

E. continua $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-7}{-4}$

Buscamos, ahora, los puntos de la recta r / $d(P_r, C) = 3$

$P_r = (1 + \lambda, 5 - 3\lambda, 7 - 4\lambda)$ y $C = (1, 0, 1)$

$$d(P_r, C) = \sqrt{(1 + \lambda - 1)^2 + (5 - 3\lambda - 0)^2 + (7 - 4\lambda - 1)^2} = \sqrt{\lambda^2 + (5 - 3\lambda)^2 + (6 - 4\lambda)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + 25 - 30\lambda + 9\lambda^2 + 36 - 48\lambda + 16\lambda^2} = \sqrt{26\lambda^2 - 78\lambda + 61}$$

Debemos resolver: $\sqrt{26\lambda^2 - 78\lambda + 61} = 3$, elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación,
 $26\lambda^2 - 78\lambda + 61 = 9$; $26\lambda^2 - 78\lambda + 61 - 9 = 0$; $26\lambda^2 - 78\lambda + 52 = 0$; simplificando entre 26,
 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Como hemos resuelto una ecuación irracional, comprobamos las soluciones.

$$\begin{array}{l|l} \lambda = 1 \rightarrow \sqrt{26 \cdot 1^2 - 78 \cdot 1 + 61} = 3 & \lambda = 2 \rightarrow \sqrt{26 \cdot 2^2 - 78 \cdot 2 + 61} = 3 \\ \sqrt{26 - 78 + 61} = 3 & \sqrt{104 - 156 + 61} = 3 \\ \sqrt{87 - 78} = 3 & \sqrt{165 - 156} = 3 \\ \sqrt{9} = 3 \quad \text{Sí} & \sqrt{9} = 3 \quad \text{Sí} \end{array}$$

Para $\lambda = 1$, $P_r = (1 + 1, 5 - 3 \cdot 1, 7 - 4 \cdot 1) = (2, 2, 3)$

Para $\lambda = 2$, $P_r = (1 + 2, 5 - 3 \cdot 2, 7 - 4 \cdot 2) = (3, -1, -1)$

Finalmente, los puntos de r que distan 3 unidades de C son: $(2, 2, 3)$ y $(3, -1, -1)$.

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x) = x e^x - 3x$.

Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

- Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X . (2 puntos).
- El punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, (2 puntos), así como la **justificación razonada** de que la función f es creciente cuando $x > 2$. (2 puntos).
- El área limitada por el eje X y la curva $y = f(x)$, cuando $0 \leq x \leq \ln 3$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano. (4 puntos).

Solución:

a) $y = f(x) = x e^x - 3x$, ¿corte con eje X ?

$$y = 0 \rightarrow x e^x - 3x = 0 \rightarrow x(e^x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x - 3 = 0 \rightarrow e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3 \end{cases}$$

Finalmente, los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X son $(0, 0)$ y $(\ln 3, 0)$.

b) Para estudiar el crecimiento de $y = f(x)$ tenemos que estudiar y' , y para obtener sus puntos de inflexión y'' . Calculemos y' e y'' .

$$y = x e^x - 3x$$

En primer lugar, $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$$y' = e^x + x e^x - 3$$

$$y'' = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x = (2 + x) e^x$$

Obtengamos el punto de inflexión de la curva.

Resolvemos $y'' = 0$

$$(2 + x) e^x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2 + x = 0 \rightarrow x = -2 \\ e^x = 0 \text{ sin solución} \end{cases}$$

Podemos determinar si para $x = -2$ hay un punto de inflexión de dos formas:

1ª	Calculamos $y''' = 2e^x + e^x + x e^x = 3e^x + x e^x = (3 + x) e^x$ $y'''_{x=-2} = (3-2)e^{-2} = e^{-2} \neq 0 \rightarrow$ En $x = -2$ hay un punto de inflexión.
2ª	Estudiamos el signo de y'' En y'' hay dos factores, uno de ellos e^x es siempre positivo, luego el signo de y'' depende del signo del segundo factor, $2 + x$, que es un polinomio de 1º grado con coeficiente de x positivo y raíz $x = -2$. Por tanto, a la izquierda de -2 y'' es negativa y a la derecha positiva, luego en $x = -2$ hay un punto de inflexión.

Calculemos el punto de inflexión.

$$x = -2 \rightarrow y = -2e^{-2} - 3(-2) = -2e^{-2} + 6 = 6 - \frac{2}{e^2}$$

El punto de inflexión de la curva $y = f(x)$ es $\left(-2, 6 - \frac{2}{e^2}\right)$

Veamos que f es creciente cuando $x > 2$.

$$\text{Como } f'(x) = e^x + x e^x - 3 = e^x(x + 1) - 3,$$

$$\text{Si } x > 2 \begin{cases} x+1 > 3 \\ e^x > 1 \end{cases} \rightarrow e^x(x+1) > 3 \rightarrow e^x(x+1) - 3 > 0$$

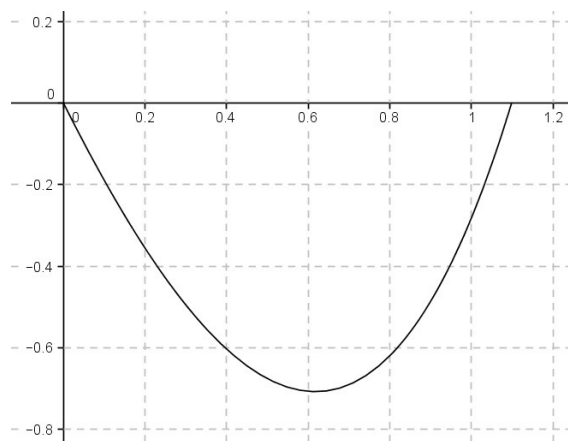
Es decir, si $x > 2$ entonces $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ es creciente.

c) Es conveniente representar, de forma aproximada, $y = f(x)$ cuando $0 \leq x \leq \ln 3$ ($\ln 3 \approx 1.098$)

$$y = f(x) = x e^x - 3x$$

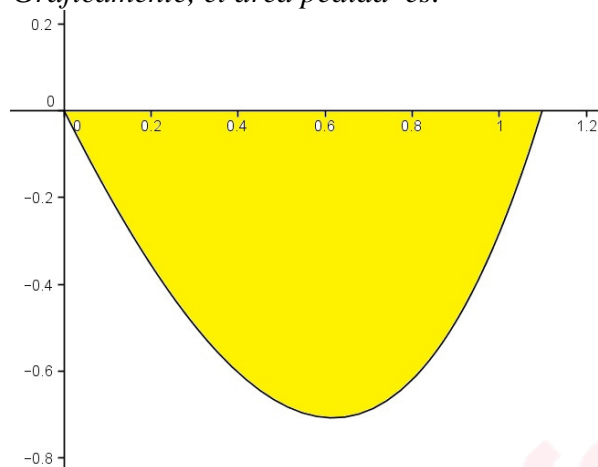
Del apartado a) sabemos que la curva corta al eje X en $(0, 0)$ y $(\ln 3, 0)$. Calculemos un punto de la curva para un valor de x entre 0 y $\ln 3$, por ejemplo, $x = 1$

$$x = 1 \rightarrow y = 1 \cdot e^1 - 3 \cdot 1 = e - 3 = -0.281...$$



A partir de estos datos la representación gráfica de $f(x)$ será,

Gráficamente, el área pedida es:



El área pedida se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$A = -\int_0^{\ln 3} (x e^x - 3x) dx$$

En primer lugar calculamos la integral indefinida:

$$\int (x e^x - 3x) dx = \int x e^x dx - \int 3x dx =$$

La primera integral es más complicada, calculemosla previamente.

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

La segunda integral es más sencilla: $\int 3x dx = 3 \frac{x^2}{2}$

Luego, $= x e^x - e^x - 3 \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } A &= -\left[x e^x - e^x - 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ln 3} = -\left[\left((\ln 3) e^{\ln 3} - e^{\ln 3} - 3 \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) - \left(0 e^0 - e^0 - 3 \frac{0^2}{2} \right) \right] = \\ &= -\left[\left((\ln 3) 3 - 3 - 3 \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) - (-1) \right] = -\left[3 \ln 3 - 3 - \frac{3}{2} (\ln 3)^2 + 1 \right] = -\left[3 \ln 3 - 2 - \frac{3}{2} (\ln 3)^2 \right] = \\ &= 2 + \frac{3}{2} (\ln 3)^2 - 3 \ln 3 = 0.5145865... \approx 0.51459 \end{aligned}$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(2 + \frac{3}{2} (\ln 3)^2 - 3 \ln 3 \right) u.a. \approx 0.51459 u.a.$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases}, \text{ donde}$$

α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. (3 puntos).
- Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos).
- Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. (4 puntos).

Solución:

La matriz ampliada, A' , de este sistema es
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes, A , es 3×3 por lo que su máximo rango posible será 3.

A' es 3×4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A ,

$$|1| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) \end{vmatrix} = -(\alpha+1)(1-\alpha) + 4 - 4 - 1 + 8(1-\alpha) + 2(\alpha+1) = -(1-\alpha^2) - 1 + 8 - 8\alpha + 2\alpha + 2 =$$

$$= -1 + \alpha^2 - 1 + 10 - 6\alpha = \alpha^2 - 6\alpha + 8$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \alpha_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y como el máximo rango de A' es 3, obtenemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Para $\alpha = 2$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{array} \right) \text{ y sabemos que } |A| = 0 \text{ y que } \text{ran}(A) = 2.$$

Calculemos el rango de A' , añadiendo al menor de orden 2 no nulo la 1^a fila y la 4^a columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} F_2 + F_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Para $\alpha = 2$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 4$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & -8 \end{array} \right)$$

Como hemos hecho en el caso anterior,

$$\left| \begin{array}{ccc} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -8 \end{array} \right| F_2 + F_1 = \left| \begin{array}{ccc} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 8 & 0 \end{array} \right| = 4 \left| \begin{array}{cc} -2 & 3 \\ -5 & 8 \end{array} \right| = 4 \cdot (-16 + 15) = -4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$. Para $\alpha = 4$ el sistema es incompatible.

El estudio realizado anteriormente nos facilita la respuesta a cada uno de los apartados.

a) El sistema es incompatible para $\alpha = 4$.

b) El sistema es compatible y determinado para $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 4$, es decir, $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 4\}$.

c) Para $\alpha = 2$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado.

Por el estudio realizado anteriormente, el menor de orden 2 no nulo nos indica las ecuaciones e incógnitas principales que son la 2ª y 3ª ecuaciones y las incógnitas x e y . El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = -4 + 2z \\ x + 4y = -4 + 3z \end{cases} \text{ y podemos resolverlo por Cramer ya que en el estudio inicial obtuvimos } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 + 2z & 1 \\ -4 + 3z & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-16 + 8z + 4 - 3z}{3} = \frac{-12 + 5z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 + 2z \\ 1 & -4 + 3z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-4 + 3z + 4 - 2z}{3} = \frac{z}{3}$$

Para $\alpha = 2$, la solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = \frac{-12 + 5\lambda}{3} \\ y = \frac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 10 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + z = 13 \end{cases}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Un vector director de cada recta (2 puntos) y la posición relativa de las rectas r y s . (2 puntos).
- La ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (3 puntos).
- La distancia entre las rectas r y s . (3 puntos).

Solución:

a) **Vector director de la recta r .**

Podemos obtener el vector director de la recta calculando sus ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 10 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 0)$$

Otra forma de obtenerlo, a partir de los vectores perpendiculares de los planos que definen la recta r ,

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \vec{n}_2 = (0, 0, 1) \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} \rightarrow \vec{v}_r = (-1, -1, 0) \approx (1, 1, 0)$$

Vector director de la recta s : $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + z = 13 \end{cases}$

Del plano $x + y = 8 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 0)$

Del plano $x + y + z = 13 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 1, 1)$

Luego, $\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0)$

Otra forma de obtenerlo,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + z = 13 \end{cases} \quad \text{Sustituyendo el valor de } x + y \text{ en la segunda ecuación: } 8 + z = 13; \quad z = 5.$$

De la 1ª ecuación: $x = 8 - y$. Las ecuaciones paramétricas de la recta s serán: $\begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{cases} \rightarrow$

$$\vec{v}_s = (-1, 1, 0) \approx (1, -1, 0)$$

Determinemos la posición relativa de las rectas r y s .

Como anteriormente hemos calculado las ecuaciones paramétricas de las dos rectas, de ellas conocemos un punto y su vector director:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r = (0, 0, 10) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_s = (8, 0, 5) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 0) \end{cases}$$

Para determinar la posición relativas de las rectas r y s estudiamos rangos en la siguiente matriz ampliada: $\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{array} \right] \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (8, 0, -5)$. La matriz a estudiar es:

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

Estudiamos el $\text{ran}(M)$, M es 3×2 luego su máximo rango es 2,

$$\left\{ \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \Rightarrow \text{Las rectas no son paralelas.}$$

Estudiamos el $\text{ran}(M')$, M' es 3×3 luego su máximo rango es 3; el estudio del rango de M nos indica que $\text{ran}(M') \geq 2$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3 \Rightarrow \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Hay que obtener el plano $\pi / s \subset \pi$ y $\pi // r$.

De las condiciones que debe cumplir el plano π deducimos que $P_s \in \pi$ y los vectores directores de π son $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_r$. Luego:

Las ecuaciones paramétricas son: $\pi: \begin{cases} x = 8 + \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ y la ecuación general } z = 5.$

c) ¿ $d(r, s)$?

Considerando las condiciones del plano π obtenido en el apartado anterior, deducimos que $d(r, s) = d(r, \pi) = (\text{como } \pi // r) = d(P_r, \pi)$.

$$P_r = (0, 0, 10) \text{ y } \pi: z = 5 \rightarrow \pi: z - 5 = 0$$

$$d(P_r, \pi) = \frac{|10 - 5|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5}{1} = 5$$

Por tanto, $d(r, s) = 5$

OPCIÓN B

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 punto).
- El total que cobra la empresa VR si viajan $60 + x$ pasajeros, siendo $0 \leq x \leq 20$. (4 puntos).
- El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 puntos)

Solución:

a) Llamando P al precio del billete y T al total que cobra la empresa VR.

$$\text{Viajan 61 pasajeros} \rightarrow P = 800 - 10(61 - 60) = 790 \text{ y } T = 790 \cdot 61 = 48190$$

$$\text{Viajan 70 pasajeros} \rightarrow P = 800 - 10(70 - 60) = 700 \text{ y } T = 700 \cdot 70 = 49000$$

$$\text{Viajan 80 pasajeros} \rightarrow P = 800 - 10(80 - 60) = 600 \text{ y } T = 600 \cdot 80 = 48000$$

Solución: si viajan 61 pasajeros la empresa cobra 48190€, si viajan 70 pasajeros cobra 49000€ y si viajan 80 pasajeros cobra 48000€.

b) Viajan $60 + x$ pasajeros, $0 \leq x \leq 20$.

$$P = 800 - 10(60 + x - 60) = 800 - 10x$$

$$T = (60 + x)(800 - 10x) = 48000 + 200x - 10x^2 = -10x^2 + 200x + 48000$$

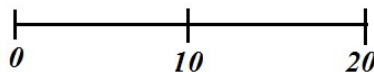
Solución: si viajan $60 + x$ pasajeros, VR cobra $-10x^2 + 200x + 48000$, siendo $0 \leq x \leq 20$.

c) Buscamos el máximo de $T = -10x^2 + 200x + 48000$, $0 \leq x \leq 20$.

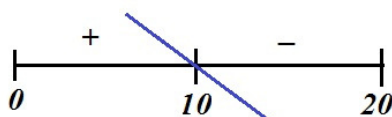
$$T' = -20x + 200$$

$$T' = 0, \quad -20x + 200 = 0; \quad -20x = -200; \quad x = 10$$

Debemos estudiar el signo de T' en los siguientes intervalos:



Como T' es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz $x = 10$, a la derecha de 10 T' es positivo y a la izquierda negativo:



Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo relativo de la función T , además como a la izquierda de 10 T es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto de T para $0 \leq x \leq 20$.

Solución: el número de pasajeros que maximiza lo que cobra en total la empresa VR es 70 ($60 + 10$).