

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, desarrollamos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

Sea

$$N(x) = \ln(1+x) - a \sin x + x \cos(3x).$$

El numerador y el denominador x^2 se anulan en $x = 0$. Para que el cociente tenga límite finito, el numerador no puede conservar un término lineal; por ello debe cumplirse $N'(0) = 0$. Derivamos:

$$N'(x) = \frac{1}{1+x} - a \cos x + \cos(3x) - 3x \sin(3x), \quad N'(0) = 2 - a.$$

Así, $a = 2$. Con este valor, numerador y denominador, junto con sus primeras derivadas, se anulan en cero; aplicamos la regla de L'Hôpital una segunda vez. La segunda derivada del numerador es

$$N''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + a \sin x - 6 \sin(3x) - 9x \cos(3x), \quad N''(0) = -1.$$

y obtenemos

$$a = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - 2 \sin x + x \cos(3x)}{x^2} = \frac{-1}{2}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Integramos la derivada para hallar $f(1)$, ya que la recta tangente necesita tanto el punto de contacto como la pendiente. Primero descomponemos:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}.$$

Una primitiva es

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln(x+1) + C.$$

La condición $f(0) = 0$ da $C = 0$, de modo que

$$f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 4 \ln 2 = 4 \ln 2 - \frac{5}{2}, \quad f'(1) = 0.$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente cero y pasa por $(1, 4 \ln 2 - \frac{5}{2})$. Por tanto,

$$y = 4 \ln 2 - \frac{5}{2}.$$

Opción A - Ejercicio 3

a) La ecuación $AX + B = 2A$ se transforma en $AX = 2A - B$. Calculamos la matriz del segundo miembro:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 1 \neq 0$, la matriz A es invertible y la ecuación tiene solución única. Su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = A^{-1}(2A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calculamos B^2 multiplicando B por sí misma:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 9 - 24 + 16 & -9 + 21 - 12 & -6 + 12 - 6 \\ 24 - 56 + 32 & -24 + 49 - 24 & -16 + 28 - 12 \\ -24 + 48 - 24 & 24 - 42 + 18 & 16 - 24 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Por tanto, las potencias de B se repiten cada dos exponentes: las pares son I y las impares son B . Como $2016 = 2 \cdot 1008$,

$$B^{2016} = (B^2)^{1008} = I.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta está definida por $x = 1$ e $y + 2z = 0$. Tomando $z = t$, la expresamos en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1, \\ y = -2t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto de r es $Q = (1, 0, 0)$ y un vector director es $\vec{v} = (0, -2, 1)$.

a) Un plano perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de la recta. Al pasar por $P = (1, 0, 5)$:

$$0(x - 1) - 2(y - 0) + (z - 5) = 0 \implies -2y + z - 5 = 0.$$

b) Para calcular la distancia y el punto simétrico, proyectamos P ortogonalmente sobre r . Si $H = Q + t\vec{v}$, la condición $(P - H) \cdot \vec{v} = 0$ da

$$t = \frac{(P - Q) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(0, 0, 5) \cdot (0, -2, 1)}{5} = 1, \quad H = (1, -2, 1).$$

La distancia es

$$d(P, r) = |P - H| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

El punto simétrico P' cumple que H es el punto medio de PP' :

$$P' = 2H - P = 2(1, -2, 1) - (1, 0, 5) = (1, -4, -3).$$

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = x/(x^2 + 1)$ tiene dominio $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 1 > 0$ para todo real.

a) El denominador nunca se anula, así que no hay asíntotas verticales. Para $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0,$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal. La curva la corta cuando $f(x) = 0$, es decir, en $(0, 0)$.

b) El signo de la derivada indica el crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

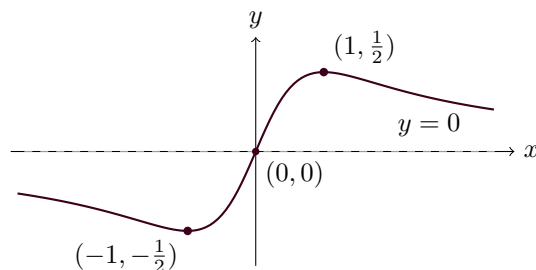
El denominador es siempre positivo. Los puntos críticos son $x = -1, 1$; probamos un valor en cada intervalo:

Intervalo	Prueba de $f'(x)$	Signo
$(-\infty, -1)$	$f'(-2) = -3/25$	-
$(-1, 1)$	$f'(0) = 1$	+
$(1, \infty)$	$f'(2) = -3/25$	-

Así, f decrece en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, y crece en $(-1, 1)$. El cambio de - a + en $x = -1$ da un mínimo $f(-1) = -1/2$; el cambio de + a - en $x = 1$ da un máximo $f(1) = 1/2$:

$$\text{mínimo } (-1, -1/2), \quad \text{máximo } (1, 1/2).$$

c) En el esbozo señalamos el corte con la asíntota, los extremos y la asíntota $y = 0$:



Opción B - Ejercicio 2

La función $\ln x$ está definida para $x > 0$. En $x = 1$, $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1$, así que la recta tangente es

$$y = x - 1.$$

Esta recta también aparece en el recinto. Para localizar el otro extremo, igualamos las curvas: $\ln x = x - 1$, cuya única solución es $x = 1$. En efecto, $g(x) = x - 1 - \ln x$ tiene derivada $g'(x) = (x - 1)/x$; decrece hasta $x = 1$, crece después y alcanza allí el mínimo $g(1) = 0$. Por tanto, para $x > 1$ la recta queda por encima del logaritmo. El área entre ambas gráficas y $x = 3$ es

$$A = \int_1^3 [(x - 1) - \ln x] dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \ln x \right]_1^3 = 4 - 3 \ln 3.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{array} \right).$$

La tercera fila de A es siempre tres veces la segunda. Para $\alpha \neq 1$, las dos primeras filas de A no son proporcionales, pues el menor

$$\begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1$$

no se anula. Luego $\text{rg}(A) = 2$. Sin embargo, la tercera fila de A^* no es tres veces la segunda, porque sus términos independientes cumplen $\alpha + 5 \neq 3 \cdot 2$. Así, $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$: el sistema es incompatible.

Si $\alpha = 1$, las filas de coeficientes son $(2, 2)$, $(1, 1)$ y $(3, 3)$, mientras que los términos independientes son 4, 2, 6; también mantienen las proporciones $2 : 1 : 3$. Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 2$, y el sistema es compatible indeterminado. En resumen:

$$\alpha = 1 : \text{SCI}; \quad \alpha \neq 1 : \text{SI}.$$

Para $\alpha = 1$, todas las ecuaciones equivalen a $x + y = 2$. Si además $x = 4$, resulta

$$(x, y) = (4, -2).$$

Opción B - Ejercicio 4

Las rectas, en forma paramétrica, son

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = t, \\ z = -1, \end{cases} \quad \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores son $\vec{v} = (2, -1, 0)$ y $-\vec{v} = (-2, 1, 0)$, así que son paralelas. Tomamos $R = (1, 1, 1) \in r$ y $S = (-1, 0, -1) \in s$. El vector $\overrightarrow{RS} = (-2, -1, -2)$ no es proporcional a $\vec{v}$; por eso las rectas son distintas y determinan un plano.

a) Un vector normal al plano se obtiene con el producto vectorial de la dirección y $\overrightarrow{RS}$:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{RS} = (2, -1, 0) \times (-2, -1, -2) = (2, 4, -4).$$

Usando el punto R y simplificando el normal a $(1, 2, -2)$:

$$(x - 1) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \implies \boxed{x + 2y - 2z - 1 = 0}.$$

La ecuación contiene R y S , y su normal es perpendicular a las direcciones de ambas rectas; por ello el plano contiene a las dos.

b) Los lados del cuadrado situados en r y s son paralelos; la longitud del lado es la distancia entre las rectas. Usamos la fórmula de distancia entre rectas paralelas:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{RS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

El área del cuadrado es el lado al cuadrado:

$$\mathcal{A} = \left(\frac{6}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{36}{5}.$$