

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Dividimos el numerador entre el denominador para identificar los términos de la asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{(x-n)^2} = x + 2n + \frac{3n^2x - 2n^3}{(x-n)^2}.$$

Como el último término tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la asíntota de $g(x) = \frac{mx^3}{(x-n)^2}$ es $y = mx + 2mn$. Al compararla con $y = 2x - 4$, obtenemos

$$m = 2, \quad 2mn = -4 \implies \boxed{m = 2, n = -1}.$$

La función queda definida para todo x salvo $x = -1$. Su dominio no es simétrico respecto del origen: 1 pertenece al dominio, pero -1 no. Por tanto, su gráfica no puede ser simétrica respecto del origen.

Opción A - Ejercicio 2

El punto de inflexión $(0, 0)$ da dos condiciones: $f(0) = d = 0$ y $f''(0) = 2b = 0$, luego $b = d = 0$. Un máximo relativo en $x = 1$ exige $f'(1) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad 3a + c = 0 \implies c = -3a.$$

Usamos la integral dada para determinar a :

$$\frac{5}{4} = \int_0^1 (ax^3 + cx) dx = \frac{a}{4} + \frac{c}{2} = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}.$$

Así, $a = -1$ y $c = 3$. La condición de máximo se confirma con $f''(1) = 6a = -6 < 0$. Los coeficientes son

$$\boxed{a = -1, \quad b = 0, \quad c = 3, \quad d = 0}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Calculamos A^{-1} resolviendo $A(u, v, w)^t = (p, q, r)^t$. Las ecuaciones dan $u = q/2$, $v = p + q/2$ y $w = r - q/2$, por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar X , calculamos primero el producto $B^t C$:

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^t C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $AX = B^t C$, multiplicamos por A^{-1} por la izquierda:

$$X = A^{-1} B^t C = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

La matriz B tiene dos filas y tres columnas, de modo que $B^t B$ es una matriz 3×3 de rango como máximo 2. Por ello su determinante es cero. Al ser este un factor del producto del determinante pedido,

$$\det(A^{2013} B^t B (A^{-1})^{2013}) = 0.$$

Opción A - Ejercicio 4

Las dos rectas tienen el mismo vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Podemos tomar $P = (0, 0, 0)$ en r y $Q = (1, 2, 3)$ en s , así que son paralelas. La distancia entre dos rectas paralelas se calcula con la componente perpendicular de $\overrightarrow{PQ}$ respecto de $\vec{v}$:

$$d(r, s) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3)$,

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = (-1, 2, -1), \quad d(r, s) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La condición de inflexión en $x = 1$ implica $f''(1) = 0$:

$$f''(x) = 6x + 2a, \quad 6 + 2a = 0 \implies a = -3.$$

El mínimo relativo en $x = 2$ exige $f'(2) = 0$, donde $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Sustituyendo $a = -3$,

$$12 - 12 + b = 0 \implies b = 0.$$

Además, $f(2) = -9$:

$$8 - 12 + c = -9 \implies c = -5.$$

La condición de mínimo se verifica porque $f''(2) = 12 + 2a = 6 > 0$. Por tanto,

$$\boxed{a = -3, \quad b = 0, \quad c = -5}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Factorizamos el denominador para descomponer la función racional. No se anula en $[2, 4]$, pues sus raíces son 1 y 5:

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5), \quad \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} = 1 - \frac{1}{4(x - 1)} + \frac{25}{4(x - 5)}.$$

Integramos cada término y evaluamos en los extremos:

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx &= \left[x - \frac{1}{4} \ln |x - 1| + \frac{25}{4} \ln |x - 5| \right]_2^4 \\ &= 2 - \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{25}{4} \ln 3 = \boxed{2 - \frac{13}{2} \ln 3}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

Para matrices de orden 3, $\det(-2A) = (-2)^3 \det A$. El determinante de una inversa es el inverso del determinante original:

$$\det(-2A) = -32, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{4}.$$

En el primer determinante del apartado b), la segunda columna cambia de signo y la segunda fila se multiplica por 2. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot \det A = -8.$$

En el segundo, las filas son $-3R_2, R_1, -R_3$ de A : el intercambio de las dos primeras filas cambia el signo, y los factores de escala aportan $(-3)(-1) = 3$. Así,

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -3 \det A = -12.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r pasa por $P = (0, 0, 0)$ y tiene vector director $(1, 1, 1)$. La recta s pasa por $Q = (2, 1, 0)$ y tiene vector director $(0, 0, 1)$, pues $x = 2$ e $y = 1$. Buscamos puntos $R = (u, u, u) \in r$ y $S = (2, 1, v) \in s$ tales que $\overrightarrow{RS}$ sea paralelo al vector director de t , $(2, 3, 1)$. Escribimos

$$S - R = (2 - u, 1 - u, v - u) = k(2, 3, 1).$$

De las dos primeras coordenadas, $2 - u = 2k$ y $1 - u = 3k$, de donde $k = -1$ y $u = 4$. La tercera coordenada da $v = 3$. Así, $R = (4, 4, 4)$ y la recta pedida pasa por R con dirección $(2, 3, 1)$. En forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 4 + 2\lambda, \\ y = 4 + 3\lambda, \\ z = 4 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En efecto, para $\lambda = -1$ se obtiene $S = (2, 1, 3) \in s$, de modo que la recta también corta a s .