

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2022–2023 · Convocatoria extraordinaria

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Potencias e inversa de una matriz

Calculamos las primeras potencias para descubrir si se repiten:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = I_3.$$

Como $2023 = 3 \cdot 674 + 1$, las potencias de A se repiten cada tres exponentes y $A^{2023} = A$. De $A^3 = I_3$ se deduce que A es invertible y que $A^{-1} = A^2$.

$$A^3 = I_3; \quad A^{2023} = A; \quad A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A.2 · Tangente y extremos relativos

La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. Para la tangente en $x = 1$, necesitamos el punto y la pendiente:

$$f(1) = 1 + 2 = 3, \quad f'(x) = 3x^2 + 4x, \quad f'(1) = 7.$$

La ecuación punto-pendiente da $y - 3 = 7(x - 1)$, es decir, $y = 7x - 4$.

Los extremos pueden aparecer donde $f'(x) = 0$. Factorizamos:

$$f'(x) = x(3x + 4) = 0 \implies x = -\frac{4}{3} \text{ o } x = 0.$$

La derivada es positiva en $(-\infty, -4/3)$, negativa en $(-4/3, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$. Así, hay un máximo relativo en $x = -4/3$ y un mínimo en $x = 0$. Sus ordenadas son

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{27}, \quad f(0) = 0.$$

$$y = 7x - 4; \quad \text{máximo local } \left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right); \quad \text{mínimo local } (0, 0).$$

Ejercicio A.3 · Continuidad y área

a) La posible discontinuidad está en $x = 2$, donde cambia la definición. Para que la función sea continua, el límite por la izquierda debe coincidir con el valor de la rama exponencial en ese punto:

$$4a + 3 = e^2 \implies a = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

b) En $[2, 3]$ la función es e^x , que es positiva. El área solicitada es, por tanto, la integral definida de esa rama:

$$A = \int_2^3 e^x dx = [e^x]_2^3 = e^3 - e^2.$$

$$a = \frac{e^2 - 3}{4}; \quad A = e^3 - e^2 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicio A.4 · Probabilidad condicionada

Sean F el suceso «practica suficiente actividad física» y V el suceso «consume entre una y cuatro porciones de fruta o verdura». La intersección se obtiene con la fórmula de la unión:

$$P(F \cap V) = P(F) + P(V) - P(F \cup V) = 0,274 + 0,651 - 0,763 = 0,162.$$

Para el apartado b), el suceso «no hace suficiente actividad y no consume esa cantidad» es $(F \cup V)^c$. Así,

$$P(F^c | V^c) = \frac{P((F \cup V)^c)}{P(V^c)} = \frac{1 - 0,763}{1 - 0,651} = \frac{0,237}{0,349} = \frac{237}{349} \approx 0,6791.$$

$$P(F \cap V) = 0,162; \quad P(F^c | V^c) = \frac{237}{349} \approx 0,6791.$$

Ejercicio A.5 · Tamaño muestral e intervalo para una proporción

a) Para estimar una proporción con error máximo E , el tamaño debe cumplir

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 p(1-p)}{E^2}.$$

La confianza del 99,01% corresponde aproximadamente a $z_{1-\alpha/2} = 2,58$. Con $p = 0,55$ y $E = 0,10$,

$$n \geq \frac{2,58^2 (0,55)(0,45)}{0,10^2} \approx 164,75.$$

Se redondea al entero superior para garantizar el error indicado.

b) La proporción observada es $\hat{p} = 70/100 = 0,70$. El intervalo al 95% es

$$\hat{p} \pm 1,96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} = 0,70 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,70(0,30)}{100}} \approx 0,70 \pm 0,0898.$$

$$n_{\min} = 165; \quad IC_{95\%}(p) \approx (0,6102, 0,7898).$$

Bloque B

Ejercicio B.1 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y el término independiente son

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = (a-2)(a-1)(a+3).$$

Si $a \notin \{-3, 1, 2\}$, el determinante es no nulo, así que el sistema es compatible determinado.

Para justificar los rangos en los casos críticos, mostramos menores no nulos y reducimos las matrices ampliadas. Si $a = 1$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ da $\text{rg}(A) \geq 2$, y la reducción

$$(A^*) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

muestra $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$; el sistema es compatible indeterminado.

Para $a = -3$, el menor $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8$ es no nulo y

$$(A^*) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Así, los rangos son 2 y 3, respectivamente, y el sistema es incompatible. Para $a = 2$, el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ es no nulo, y

$$(A^*) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

por lo que también es incompatible ($\text{rg}(A) = 2$, $\text{rg}(A^*) = 3$).

Para $a = 0$, las ecuaciones son $y + 2z = 1$, $x + 2z = 0$ y $x + 2y = 1$. De la segunda, $x = -2z$; al sustituir en la tercera, $y - z = 1/2$. La primera da $3z + 1/2 = 1$, luego

$$z = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad x = -\frac{1}{3}.$$

$$\begin{array}{ll} a \notin \{-3, 1, 2\} : & \text{SCD,} \\ a = 1 : & \text{SCI,} \\ a = -3 \text{ o } 2 : & \text{SI,} \\ a = 0 : & (x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right). \end{array}$$

Ejercicio B.2 · Programación lineal

Sean x los minutos de fuerza e y los minutos cardiovasculares. Las condiciones son

$$45 \leq x + y \leq 60, \quad 20 \leq x \leq y.$$

Como el beneficio cardiovascular es doble, la función que optimizamos es $B(x, y) = x + 2y$. Las intersecciones que forman los vértices de la región son

$$(20, 25), \quad (20, 40), \quad (30, 30), \quad (22,5, 22,5).$$

La función lineal alcanza su máximo y su mínimo en vértices. Al evaluarla:

(x, y)	$(20, 25)$	$(20, 40)$	$(30, 30)$	$(22,5, 22,5)$
$B = x + 2y$	70	100	90	67,5

Más beneficiosa: 20 min de fuerza y 40 cardiovasculares; menos: 22,5 min de cada tipo.

Ejercicio B.3 · Dominio, asíntotas y monotonía

La función $f(x) = x + 2/x$ es racional y exige $x \neq 0$, de modo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Al acercarnos a cero, $2/x$ diverge y aparece la asíntota vertical $x = 0$. En los infinitos, $f(x) - x = 2/x \rightarrow 0$, así que la asíntota oblicua es $y = x$; no hay horizontal, pues $f(x)$ diverge.

Para estudiar crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio y el numerador se anula en $x = \pm\sqrt{2}$. La derivada es positiva para $|x| > \sqrt{2}$ y negativa para $0 < |x| < \sqrt{2}$. Por tanto, f crece en $(-\infty, -\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, +\infty)$, y decrece en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(0, \sqrt{2})$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad x = 0 \text{ vertical}; \quad y = x \text{ oblicua}; \quad \text{crece en } (-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty).$$

Ejercicio B.4 · Probabilidad total y Bayes

Sean G y J las modalidades general y de jóvenes doctores, y S el suceso «recibe ayuda». Los solicitantes forman una partición con probabilidades 2159/3475 y 1316/3475. Aplicando probabilidad total,

$$P(S) = \frac{2159}{3475}(0,161) + \frac{1316}{3475}(0,211) \approx 0,1799.$$

Para hallar la probabilidad inversa del apartado b), aplicamos Bayes:

$$P(G | S) = \frac{P(S | G)P(G)}{P(S)} = \frac{2159(0,161)}{2159(0,161) + 1316(0,211)} \approx 0,5559.$$

$$P(S) \approx 0,1799; \quad P(G | S) \approx 0,5559.$$

Ejercicio B.5 · Intervalo y tamaño muestral

a) Con $\sigma = 2$ km conocida, el intervalo de confianza para la media es $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Para confianza del 99%, $z_{0,995} = 2,576$:

$$50 \pm 2,576 \frac{2}{\sqrt{20}} = 50 \pm 1,151.$$

b) El error máximo debe cumplir $E = z_{0,95}\sigma/\sqrt{n} < 1$. Con $z_{0,95} = 1,645$:

$$\frac{1,645 \cdot 2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > 10,8241.$$

El menor entero válido es 11.

$$IC_{99\%} \approx (48,849, 51,151) \text{ km}; \quad n_{\min} = 11.$$