

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2003

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Plano que cumple dos condiciones

El plano buscado contiene A y B , así que contiene el vector

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 1, 2 - 0, 0 - 1) = (-1, 2, -1).$$

El plano dado tiene normal $\vec{n} = (1, -2, -1)$. Si $\vec{n}'$ es normal al plano buscado, debe ser perpendicular tanto a $\overrightarrow{AB}$ como a $\vec{n}$. Tomamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{n} = (-4, -2, 0),$$

por lo que podemos usar $\vec{n}' = (2, 1, 0)$. Con el punto $A = (1, 0, 1)$:

$$2(x - 1) + y = 0.$$

Conclusión. El plano es $2x + y - 2 = 0$.

Opción A - Ejercicio 2. Coplanaridad de dos rectas

Pasamos ambas rectas a forma paramétrica. Para r tomamos $P = (1, -1, k)$ y $\vec{u} = (-1, 1, 1)$. La recta s , intersección de los planos $x - y + z = 3$ y $3x + z = 1$, contiene el punto $Q = (1/3, -8/3, 0)$; su vector director es el producto de sus normales, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$.

Dos rectas no paralelas son coplanarias si el producto mixto de $Q - P$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$(Q - P) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

Como $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, -1)$, la condición se reduce a $k - 4 = 0$.

Para $k = 4$, un normal del plano que contiene a ambas es $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, -1)$. Usando $P = (1, -1, 4)$:

$$(x - 1) + 2(y + 1) - (z - 4) = 0.$$

Conclusión. $k = 4$ y el plano común es $x + 2y - z + 5 = 0$.

Opción A - Ejercicio 3. Sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos $\det A = 1 - m$. Si $m \neq 1$, el rango de A es tres, igual al de A^* y al número de incógnitas; Rouché-Frobenius garantiza solución única.

Para $m = 1$, el determinante se anula. Un menor de orden dos no nulo es

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

así que $\text{rg}(A) = 2$. La tercera fila de la ampliada es combinación de las dos primeras y se conserva la misma relación en los términos independientes; de hecho, $\text{rg}(A^*) = 2$. El sistema es SCl. Las ecuaciones dan $y = 3$ y $x + z = -1$:

$$(x, y, z) = (-1 - t, 3, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. El sistema es SCD si $m \neq 1$ y SCl si $m = 1$; en este último caso, la familia de soluciones es la indicada.

Opción A - Ejercicio 4. Extremos, gráfica e integral

La función $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ es continua en el intervalo porque $2 - \cos x \geq 1$. Derivando mediante la regla del cociente:

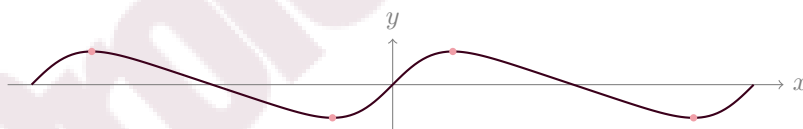
$$f'(x) = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

Los puntos críticos cumplen $\cos x = 1/2$. En $[-2\pi, 2\pi]$ son $x = \pm\pi/3, \pm5\pi/3$. Al evaluar la función:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Los extremos del intervalo tienen valor cero, por lo que los anteriores son también los extremos absolutos.

La función tiene periodo 2π y corta al eje en los múltiplos de π . La derivada indica los cambios de crecimiento en los cuatro puntos críticos. Con esos datos se traza su gráfica en el intervalo:



Para la integral usamos que $(2 - \cos x)' = \sin x$:

$$\int_0^{\pi/3} f(x) dx = [\ln(2 - \cos x)]_0^{\pi/3} = \ln \frac{3}{2}.$$

Conclusión. El máximo absoluto es $1/\sqrt{3}$ en $x = -5\pi/3, \pi/3$, el mínimo absoluto es $-1/\sqrt{3}$ en $x = -\pi/3, 5\pi/3$, y la integral vale $\ln(3/2)$.

Opción B - Ejercicio 1. Precios y variación porcentual

Sean N, E, I los precios, en euros, de los billetes nacionales, europeos comunitarios e internacionales no comunitarios. Dividimos por diez el número de billetes de cada venta y planteamos

$$\begin{cases} N + E + I = 1200, \\ N + 2I = 1300, \\ N + E = 700. \end{cases}$$

Restando la tercera ecuación de la primera resulta $I = 500$. La segunda da $N = 300$, y la tercera $E = 400$.

En las tres ventas se compran 30 billetes nacionales y 20 europeos. La reducción del 20 % en el precio nacional supone perder $0,2 \cdot 300 = 60$ euros por billete, es decir, 1800 euros en total. Para compensar esa pérdida, los veinte billetes europeos deben aportar 1800 euros más: el aumento unitario es $1800/20 = 90$ euros. Como su precio inicial era 400 euros, el porcentaje es

$$\frac{90}{400} \cdot 100 = 22,5 \, \%.$$

Conclusión. Los precios son 300 €, 400 € y 500 €; el precio europeo debe subir un 22,5 %.

Opción B - Ejercicio 2. Identidad e incógnita matricial

a) Partimos de $A + B = AB$ y agrupamos los términos con A :

$$A - AB = -B \implies A(I - B) = -B.$$

Como A y B son invertibles, la igualdad implica que $I - B$ también lo es. Invirtiendo el producto, respetando el orden de los factores,

$$(I - B)^{-1} = (-A^{-1}B)^{-1} = -B^{-1}A.$$

b) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, de $A + B = AB$ se obtiene $(A - I)B = A$. Como $A - I$ es invertible,

$$B = (A - I)^{-1}A.$$

Al efectuar el producto,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La identidad queda demostrada y la matriz buscada en b) es $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 3. Continuidad, gráfica y área

Como $|4 - x|$ cambia de expresión en $x = 4$, escribimos

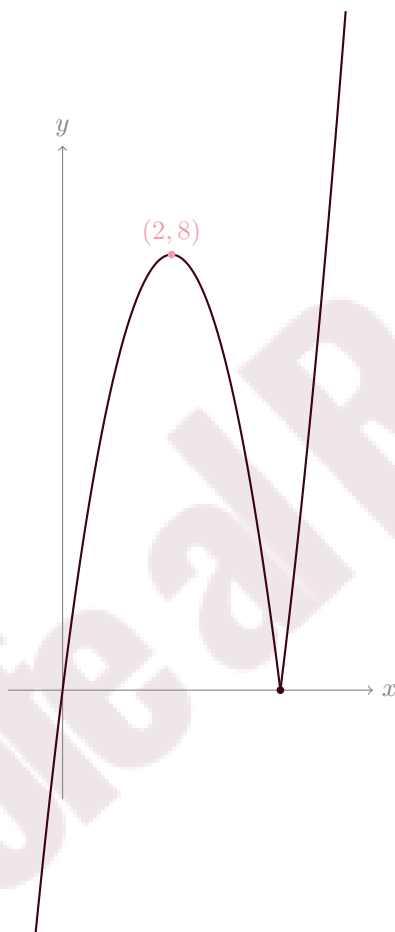
$$f(x) = \begin{cases} 8x - 2x^2, & x \leq 4, \\ 2x^2 - 8x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Las dos expresiones valen cero en $x = 4$, así que la función es continua allí; en el resto es polinómica y, por tanto, continua. Las derivadas laterales en el punto de unión son

$$f'_-(4) = 8 - 4 \cdot 4 = -8, \quad f'_+(4) = 4 \cdot 4 - 8 = 8.$$

No coinciden, así que no es derivable en 4; sí lo es en cualquier otro punto.

La primera rama es una parábola cóncava hacia abajo y la segunda, cóncava hacia arriba. Sus cortes con el eje son $x = 0$ y $x = 4$; el vértice de la primera rama es $(2, 8)$.



En $[0, 4]$ la función es no negativa y en $[4, 5]$ también. Por tanto el área es la suma de ambas integrales:

$$A = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx + \int_4^5 (2x^2 - 8x) dx = \frac{64}{3} + \frac{14}{3} = 26.$$

Conclusión. La función es continua en $\mathbb{R}$ y no derivable en $x = 4$; el área pedida es 26.

Opción B - Ejercicio 4. Intersección y plano paralelo

Parametrizamos la recta dada como $(x, y, z) = (1 + t, 2t, -1 + 2t)$. Al imponer el plano $x + y + z = 0$ se obtiene $5t = 0$, de modo que

$$Q = (1, 0, -1).$$

Un punto de la recta correspondiente a un parámetro t dista de Q una longitud

$$|t|\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3|t|.$$

Para que la distancia sea 2, debe ser $t = \pm 2/3$. Los puntos de corte son $Q_+ = (5/3, 4/3, 1/3)$ y $Q_- = (1/3, -4/3, -7/3)$. Un plano paralelo a π tiene la forma $x + y + z = d$; al sustituir cada punto se obtienen los dos valores posibles de d . **Conclusión.** Los planos buscados son $x + y + z = 10/3$ y $x + y + z = -10/3$.