

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2002

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Extremos e integral con parámetro

La función $f(x) = x/(x^2 + 1)$ tiene dominio $\mathbb{R}$ porque el denominador siempre es positivo. Derivamos para localizar los extremos:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

La derivada es negativa si $|x| > 1$ y positiva si $|x| < 1$. Así, hay un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Para el apartado b), una primitiva es $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$, pues su derivada es $x/(x^2 + 1)$. Imponemos la condición indicada:

$$\int_0^a f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^a = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) = 1.$$

De aquí, $a^2 + 1 = e^2$. Como se pide $a > 0$, **Conclusión.** $a = \sqrt{e^2 - 1}$. Los extremos son $-1/2$ en $x = -1$ y $1/2$ en $x = 1$.

Opción A - Ejercicio 2. Continuidad, derivabilidad y tangente

Para $x \geq 2$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$; para $x < 2$, $f(x) = x(x-2)$. En el punto de unión, ambas ramas tienden a 0 y el valor asignado es 0, luego f es continua en todo $\mathbb{R}$.

La derivada lateral izquierda en 2 es la derivada de $x^2 - 2x$ evaluada en 2:

$$f'_-(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Por la derecha, el cociente incremental vale $\sqrt[3]{h}/h = 1/h^{2/3}$ para $h > 0$, que tiende a $+\infty$. No existe derivada finita en 2; en el resto del dominio las ramas son derivables.

En $x = 3$ se usa la rama de la raíz: $f(3) = 1$ y $f'(3) = 1/3$. La recta tangente en $(3, 1)$ es

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3), \quad \text{es decir,} \quad y = \frac{x}{3}.$$

Conclusión. f es continua en $\mathbb{R}$ y no derivable en $x = 2$; la tangente en $(3, 1)$ es $y = x/3$.

Opción A - Ejercicio 3. Discusión del sistema y posición de los planos

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es cero para todo λ . Sin embargo, el menor formado por las dos primeras filas y las columnas x, y vale 1, así que $\text{rg}(A) = 2$ siempre.

De la segunda ecuación, $y = z + \lambda$. Sustituyendo en la primera y la tercera obtenemos, respectivamente,

$$x + (\lambda + 1)z = \lambda^2 - \lambda, \quad x + (\lambda + 1)z = \lambda - \lambda^2.$$

Para que sean compatibles, $\lambda^2 - \lambda = \lambda - \lambda^2$, es decir, $2\lambda(\lambda - 1) = 0$. Así que el sistema es compatible solo para $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$; en los demás casos el rango ampliado es tres y es incompatible.

Si $\lambda = 0$, tomando $z = t$ se obtiene $(x, y, z) = (-t, t, t)$. Si $\lambda = 1$, resulta $(x, y, z) = (-2t, 1 + t, t)$.

c) Para $\lambda = 2$, las ecuaciones primera y segunda sumadas tienen el mismo miembro izquierdo que la tercera, pero el término independiente sería $4 + 2 = 6$ en vez de 2. No existe punto común. Los vectores normales son $(1, 1, 2)$, $(0, 1, -1)$ y $(1, 2, 1)$; ninguno es proporcional a otro, por lo que cada pareja de planos se corta en una recta. Como el tercer normal es suma de los dos primeros, las direcciones de esas rectas son paralelas; al no haber punto común, las rectas son distintas. **Conclusión.** El sistema es SCI para $\lambda = 0, 1$, con las familias indicadas, y SI para los demás valores. Para $\lambda = 2$, los planos se cortan dos a dos en rectas paralelas distintas.

Opción A - Ejercicio 4. Distancia entre rectas y rectas pedidas

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 3) + t(1, -2, 2), \quad s : (x, y, z) = (2, 0, -1) + u(3, 1, -1).$$

a) Para rectas alabeadas usamos el producto mixto:

$$d(r, s) = \frac{|(Q - P) \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)|}{\|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\|}.$$

Aquí $Q - P = (2, -1, -4)$ y $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 7, 7)$, luego

$$d(r, s) = \frac{|0 - 7 - 28|}{\sqrt{98}} = \frac{35}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Los pies de la perpendicular común se obtienen imponiendo que el vector entre $R(t) \in r$ y $S(u) \in s$ sea perpendicular a los dos directores. La resolución da $t = -5/14$ y $u = -11/14$:

$$R = \left(-\frac{5}{14}, \frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right), \quad S = \left(-\frac{5}{14}, -\frac{11}{14}, -\frac{3}{14}\right).$$

Como $S - R$ es proporcional a $(0, 1, 1)$, la perpendicular común es

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{14}, \frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right) + v(0, 1, 1).$$

c) La recta que pasa por $P = (1, 0, 0)$ y corta a r en $(0, 1, 3)$ tiene director $(-1, 1, 3)$. Su otro punto de corte con s es $(5/4, -1/4, -3/4)$, que está en esa misma recta.

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + w(-1, 1, 3), \quad w \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La distancia es $5\sqrt{2}/2$; la perpendicular común y la recta que pasa por P son las paramétricas indicadas.

Opción B - Ejercicio 1. Lugar geométrico de una diferencia de distancias

Los focos son $A = (0, 3)$ y $B = (0, -1)$. Su punto medio es el centro $C = (0, 1)$ y la distancia focal es 4, por lo que $c = 2$. En una hipérbola, la diferencia absoluta de distancias a los focos es $2a$; aquí $2a = 1$ y $a = 1/2$. Como $c^2 = a^2 + b^2$,

$$b^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

El eje transversal es vertical, así que la ecuación cartesiana es

$$\frac{(y-1)^2}{1/4} - \frac{x^2}{15/4} = 1, \quad \text{o equivalentemente} \quad 4(y-1)^2 - \frac{4}{15}x^2 = 1.$$

La igualdad orientada $d(P, A) - d(P, B) = 1$ selecciona la rama inferior de esta hipérbola. **Conclusión.** El lugar pertenece a la hipérbola de ecuación $4(y-1)^2 - 4x^2/15 = 1$; con la diferencia orientada del enunciado, corresponde a su rama inferior.

Opción B - Ejercicio 2. Planos con una recta común

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -(a-1)^2(a+2).$$

Si $a \neq 1, -2$, el rango es tres: los tres planos tienen un único punto común y no contienen una recta común. Para $a = 1$, todas las filas de A son $(1, 1, 1)$, pero los términos independientes son distintos; el sistema es incompatible. Para $a = -2$, un menor de orden dos no nulo asegura $\text{rg}(A) = 2$, y la relación entre filas también se cumple en los términos independientes, de modo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Los planos comparten una recta.

Resolviendo las dos primeras ecuaciones y tomando $z = t$:

$$x + y - 2z = -2, \quad x - 2y + z = -1 \implies (x, y, z) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + t(1, 1, 1).$$

Conclusión. Los tres planos contienen una recta común únicamente para $a = -2$, y esa recta es la indicada.

Opción B - Ejercicio 3. Potencias de una matriz involutiva

De $A^2 = I$ se deduce que A es invertible y que $A^{-1} = A$, pues $AA = I$.

Las potencias se repiten cada dos exponentes: las pares son I y las impares son A . En efecto, si $n = 2q$,

$$A^n = (A^2)^q = I;$$

y si $n = 2q + 1$,

$$A^n = (A^2)^q A = A.$$

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Al igualarla a I , las entradas dan $1+a = 0$ y $a^2 = 1$, que se satisfacen simultáneamente con $a = -1$. **Conclusión.** $A^{-1} = A$; $A^n = I$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar; el parámetro es $a = -1$.

Opción B - Ejercicio 4. Regla de la cadena y límite

Como $f(0) = 1$, la función compuesta es $g(x) = f(x+1)$. Por la regla de la cadena,

$$g'(x) = f'(x+1) \cdot 1 \implies g'(0) = f'(1) = 4.$$

En el límite, el numerador y el denominador tienden a cero. Aplicamos la regla de L'Hôpital; al derivar el numerador usamos la regla de la cadena en $f(x+1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x)f'(x) - f'(x+1)}{e^x}.$$

Sustituyendo los datos $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$ y $f'(1) = 4$:

$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - 4}{1} = 8.$$

Conclusión. $g'(0) = 4$ y el límite pedido vale 8.