

BAREMO DEL EXAMEN: El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + a y + 2 z = 3 \\ x - 3 y + a z = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$
, donde a es un

parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $a = 0$. (3 puntos)
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

PROBLEMA 2. Se da los planos $\pi: x + y = 1$ y $\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π' . (3 puntos)
- La distancia de la recta r a los planos π y π' . (3 puntos)
- Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π' . (4 puntos)

PROBLEMA 3. Dada la función
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El dominio de definición y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3 + 1 puntos)
- El valor de $\int_2^3 f(x) dx$. (3 puntos)

PROBLEMA 4. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 puntos)
- b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 puntos)

- c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (3 puntos)

PROBLEMA 5. Sea dan las rectas $r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ y el plano

$$\pi: 3x + ay - z + 1 = 0.$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π . (4 puntos)
- b) La distancia entre las rectas r y s . (3 puntos)
- c) El coseno del ángulo que forma la recta r y la recta $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 puntos)

PROBLEMA 6. Los vértices de un triángulo son $A(0, 12)$, $B(-5, 0)$ y $C(5, 0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x, 0)$ y $(x, 0)$ siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 puntos)
- b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 puntos)
- c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)