

Convocatoria de Septiembre de 2019

Resolución de las opciones A y B con desarrollo matemático y resultados exactos.

Opción A - Ejercicio 1

El rectángulo es simétrico respecto del eje y . Si $x \in [0, 6]$ es la semibase, su altura es $f(x) = 6 - x^2/6$, y el área vale

$$A(x) = 2x \left(6 - \frac{x^2}{6} \right) = 12x - \frac{x^3}{3}.$$

Derivamos: $A'(x) = 12 - x^2$, que se anula en $x = 2\sqrt{3}$ dentro del dominio. Como $A''(x) = -2x < 0$ para $x > 0$, se alcanza el máximo. La altura es 4 y la base $4\sqrt{3}$; las dimensiones son $4 \times 4\sqrt{3}$.

Opción A - Ejercicio 2

Integramos por partes, tomando $u = \ln x$ y $dv = x^{-1/2}dx$; así, $du = dx/x$ y $v = 2\sqrt{x}$:

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

La condición $f(1) = 0$ da $C = 4$. Por tanto,

$$f(x) = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4, \quad x > 0.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{array} \right).$$

El determinante es $\det A = 2m(m+4)$. Si $m \neq 0, -4$, el sistema es SCD. Para $m = -4$, el menor superior izquierdo de orden dos vale 3, luego $\text{rg } A = 2$; además, $R_1 + 5R_2 + 3R_3$ anula los coeficientes, pero da $0 = -32$ en los términos independientes. Así $\text{rg } A^* = 3$ y el sistema es SI. Para $m = 0$, el menor formado por las dos primeras filas y columnas es -1 , y la tercera fila es combinación de las dos primeras también en la ampliada; por tanto, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$ y el sistema es SCI.

Cuando $m = 0$, la reducción da $x - 3z = 0$ e $y + 5z = 0$. Tomando $z = t$, las soluciones son

$$(x, y, z) = (3t, -5t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Para la ortogonalidad imponemos productos escalares nulos:

$$(2, \alpha, \beta) \cdot (1, 2, 3) = 0, \quad (2, \alpha, \beta) \cdot (1, -2, -1) = 0.$$

Las ecuaciones $2 + 2\alpha + 3\beta = 0$ y $2 - 2\alpha - \beta = 0$ dan $(\alpha, \beta) = (2, -2)$.

Para tener la misma dirección que $\vec{v} = (1, -2, -1)$, imponemos $\vec{w} = t\vec{v}$. La primera coordenada da $t = 2$, y por tanto $(\alpha, \beta) = (-4, -2)$.

Con $\alpha = 8$, buscamos $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Las dos primeras coordenadas dan $\lambda + \mu = 2$ y $2\lambda - 2\mu = 8$, así que $(\lambda, \mu) = (3, -1)$. La tercera coordenada es $\beta = 3 \cdot 3 - (-1) = 10$.

Opción B - Ejercicio 1

Para continuidad en $x = 0$, el valor del tramo izquierdo debe coincidir con el límite del derecho:

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

La derivada izquierda en 0 es $1 + a$. Para la derecha, usando $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$, el cociente es $1 - x/2 + o(x)$ y su derivada lateral vale $-1/2$. La igualdad de derivadas exige $1 + a = -1/2$, de donde $a = -3/2$, $b = 1$.

Opción B - Ejercicio 2

La función está definida en todo $\mathbb{R}$. Sus cortes con los ejes se obtienen de $xe^{-x^2} = 0$: solo corta en $(0, 0)$. La derivada es

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Como la exponencial es positiva, los puntos críticos son $x = \pm 1/\sqrt{2}$. El signo pasa de negativo a positivo en $-1/\sqrt{2}$ y de positivo a negativo en $1/\sqrt{2}$; hay mínimo y máximo, respectivamente, con valores $-1/\sqrt{2}e$ y $1/\sqrt{2}e$.

En $[0, a]$ la función es no negativa, de modo que el área es la integral directa. Usando $u = -x^2$, o reconociendo la derivada de e^{-x^2} ,

$$\frac{1}{4} = \int_0^a xe^{-x^2} dx = \frac{1 - e^{-a^2}}{2}.$$

Así, $e^{-a^2} = 1/2$ y, como $a > 0$, $a = \sqrt{\ln 2}$.

Opción B - Ejercicio 3

Sea α el ángulo menor, γ el mayor y β el restante. De $\gamma = 2\alpha$ y $\alpha + \gamma = 2\beta$ resulta $\beta = 3\alpha/2$. La suma de los ángulos de un triángulo da $\alpha + 3\alpha/2 + 2\alpha = 180^\circ$, así que $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$.

Opción B - Ejercicio 4

Los directores de las rectas son $(1, 2, 2)$ y $(-1, 1, 1)$. Un punto genérico de r es $(2+t, k+2t, 2t)$; uno de s es $(-1-u, 1+u, 3+u)$. Igualando las coordenadas x, z se obtiene $t = 0$ y $u = -3$; la coordenada y exige $k = -2$. Por tanto, $k = -2$.

Para $k = 1$, un punto de r es $(2, 1, 0)$. Un vector normal del plano que contiene a r y es paralelo a s es el producto vectorial de sus directores:

$$(1, 2, 2) \times (-1, 1, 1) = (0, -3, 3).$$

Usándolo con el punto de r , la ecuación general del plano se reduce a

$$y - z - 1 = 0.$$