

Junio de 2022 · Convocatoria ordinaria

El examen permite elegir tres de los seis problemas. Aquí resolvemos los seis para que puedas estudiar cualquiera de ellos. En cada apartado explicamos qué herramienta usamos y cómo se aplican los datos.

Problema 1 · Matrices

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla

La traspuesta intercambia filas y columnas:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos fila por columna. Por ejemplo, la entrada de la primera fila y primera columna es $1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$:

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Restamos esta matriz a C :

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. En este caso,

$$\det(C - AB^T) = (-1)(-3) - (1)(0) = 3 \neq 0.$$

Por tanto, la inversa existe. Para una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, usamos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -3$:

$$(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Calcular X si $CX = AB^T X + I$

Restamos $AB^T X$ en los dos miembros. Como $AB^T X = (AB^T)X$, queda

$$CX - AB^T X = I \implies (C - AB^T)X = I.$$

Multiplicamos a la izquierda por $(C - AB^T)^{-1}$:

$$X = (C - AB^T)^{-1}I = (C - AB^T)^{-1}.$$

Así, usando el resultado del apartado anterior,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$

Ya hemos calculado $AB^T = 2I$. Las primeras potencias muestran el patrón:

$$(AB^T)^2 = (2I)(2I) = 4I, (AB^T)^3 = (2I)(2I)(2I) = 8I.$$

En general, al multiplicar n copias de $2I$, sacamos el factor escalar 2 de cada copia; además, $I^n = I$:

$$(AB^T)^n = (2I)^n = 2^n I^n.$$

Por tanto,

$$(AB^T)^n = 2^n I \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Problema 2 · Rango, inversa y determinante

La matriz depende del número real m :

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Estudiar el rango según m

El rango de una matriz 3×3 es 3 cuando su determinante no se anula. Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= m \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} + (m-1) \begin{vmatrix} -2m & m^2 \\ 0 & 2m \end{vmatrix} \\ &= m(m^2 - 2m) + (m-1)(-4m^2) \\ &= m^2(2 - 3m) = -m^2(3m - 2). \end{aligned}$$

El determinante vale cero cuando

$$-m^2(3m - 2) = 0 \iff m = 0 \text{ o } m = \frac{2}{3}.$$

Caso 1: $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$. El determinante no es cero, así que

$$\text{rg}(A) = 3.$$

Caso 2: $m = \frac{2}{3}$. El determinante es cero, luego el rango es menor que 3. Comprobamos el menor formado por las dos primeras filas y columnas:

$$\begin{vmatrix} m & 0 \\ -2m & m^2 \end{vmatrix} = m^3 \implies m^3|_{m=2/3} = \frac{8}{27} \neq 0.$$

Existe un menor de orden 2 no nulo; por tanto,

$$\text{rg}(A) = 2.$$

Caso 3: $m = 0$. Sustituimos el parámetro antes de calcular el rango:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras columnas son nulas y la tercera no lo es; solo hay una columna linealmente independiente. Así,

$$\text{rg}(A) = 1.$$

En conclusión,

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & m \neq 0, \frac{2}{3}, \\ 2, & m = \frac{2}{3}, \\ 1, & m = 0. \end{cases}$$

b) Hallar A^{-1} para $m = 2$

Primero sustituimos $m = 2$:

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \det A(2) = -2^2(3 \cdot 2 - 2) = -16 \neq 0.$$

La inversa existe. Usamos la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)$, donde $\text{Adj}(A)$ es la traspuesta de la matriz de cofactores. Para $A(2)$, la matriz de cofactores es

$$\text{Cof}(A(2)) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & -((-4) \cdot 1 - 1 \cdot 0) & (-4) \cdot 4 - 4 \cdot 0 \\ -(0 \cdot 1 - 1 \cdot 4) & 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & -(2 \cdot 4 - 0 \cdot 0) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & -(2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4)) & 2 \cdot 4 - 0 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

La trasponemos y dividimos entre el determinante:

$$A(2)^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Encontrar m si $\det(2A) = -8$

Al multiplicar una matriz 3×3 por 2, el determinante se multiplica por 2^3 :

$$\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8[-m^2(3m - 2)].$$

Imponemos el valor pedido y simplificamos:

$$-8m^2(3m - 2) = -8 \iff m^2(3m - 2) = 1.$$

Llevamos todo al mismo miembro y factorizamos:

$$3m^3 - 2m^2 - 1 = 0 \iff (m - 1)(3m^2 + m + 1) = 0.$$

El discriminante del segundo factor es $1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$, de modo que ese factor no tiene raíces reales. La única solución real es

$$m = 1.$$

Problema 3 · Posición relativa de rectas y transversal

Las rectas vienen dadas mediante dos ecuaciones cada una. Tomamos z como parámetro para escribirlas en forma paramétrica, tal como usaremos en todo el ejercicio:

$$r : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \implies r : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + t(1, -3, 1),$$

$$s : \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \implies s : (x, y, z) = (4, -3, 0) + u(-5, 4, 1).$$

a) Decidir si se cortan, son paralelas o se cruzan

Los vectores directores $(1, -3, 1)$ y $(-5, 4, 1)$ no son proporcionales; por eso las rectas no son paralelas. Comprobamos si se cortan. En un punto común, las coordenadas z deben coincidir, así que $t = u$. Igualando las coordenadas x y y :

$$t - 1 = 4 - 5t \implies t = \frac{5}{6},$$

$$2 - 3t = 4t - 3 \implies t = \frac{5}{7}.$$

El mismo parámetro no puede ser a la vez $5/6$ y $5/7$; no existe punto común. Al no ser paralelas ni cortarse, son rectas que se cruzan (alabeadas):

$$r \text{ y } s \text{ son alabeadas.}$$

b) Recta por el origen que corta a r y s

Un punto de r y uno de s son, respectivamente,

$$R = (-1 + t, 2 - 3t, t), \quad S = (4 - 5u, 4u - 3, u).$$

Para que el origen, R y S estén en una misma recta, debe existir un número k tal que $S = kR$. Igualamos las tres coordenadas:

$$4 - 5u = k(t - 1), \quad 4u - 3 = k(2 - 3t), \quad u = kt.$$

Sustituimos $u = kt$ en las dos primeras:

$$4 + k - 6kt = 0, \quad 7kt - 2k - 3 = 0.$$

De la primera, $k(1 - 6t) = -4$; de la segunda, $k(7t - 2) = 3$. Igualando las expresiones de k :

$$\frac{-4}{1 - 6t} = \frac{3}{7t - 2} \implies -4(7t - 2) = 3(1 - 6t) \implies t = \frac{1}{2}.$$

Entonces $k = 2$ y $u = kt = 1$. Por ejemplo,

$$R = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad S = (-1, 1, 1) = 2R.$$

Así, la recta buscada pasa por el origen y tiene vector director $(-1, 1, 1)$:

$$\ell : (x, y, z) = \lambda(-1, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 4 · Planos y recta

El primer plano está en forma general:

$$\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0.$$

El segundo viene dado en forma paramétrica:

$$\pi_2 : \begin{cases} x = -1 + \alpha, \\ y = 1 + \alpha + \beta, \\ z = \alpha - \beta. \end{cases}$$

a) Posición relativa de los dos planos

Del segundo plano obtenemos $Q = (-1, 1, 0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Un vector normal es el producto vectorial $\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 1, 1)$. Usando la forma general $\vec{n} \cdot ((x, y, z) - Q) = 0$, resulta

$$-2(x + 1) + (y - 1) + z = 0 \iff 2x - y - z + 3 = 0.$$

El normal de π_1 es $\vec{n}_1 = (2, -1, -1)$, y $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, así que los planos son paralelos. No son el mismo plano: $Q \in \pi_2$, pero $2(-1) - 1 - 0 + 4 = 1 \neq 0$, de modo que $Q \notin \pi_1$. Concluimos que

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \text{ y son distintos.}$$

b) Simétrico de $P = (1, 0, 0)$ respecto de π_1

Para el plano $ax + by + cz + d = 0$, el pie H de la perpendicular desde $P = (x_0, y_0, z_0)$ se calcula con

$$H = P - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c).$$

Aquí $(a, b, c, d) = (2, -1, -1, 4)$. El valor del numerador en P y la norma al cuadrado del normal son

$$2(1) - 0 - 0 + 4 = 6, \quad 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 6.$$

Por tanto,

$$H = (1, 0, 0) - \frac{6}{6}(2, -1, -1) = (-1, 1, 1).$$

Como H es el punto medio entre P y su simétrico, $P' = 2H - P = 2(-1, 1, 1) - (1, 0, 0)$. Por tanto,

$$P' = (-3, 2, 2).$$

c) Intersección de π_1 con la recta

La recta del enunciado es

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Igualemos los tres cocientes a un parámetro λ y la dejamos en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (1 + \lambda, 2\lambda, 2 - \lambda).$$

Sustituimos en la ecuación general de π_1 :

$$\begin{aligned} 2(1 + \lambda) - 2\lambda - (2 - \lambda) + 4 &= 0, \\ \lambda + 4 &= 0, \implies \lambda = -4. \end{aligned}$$

Al sustituir ese valor en la recta:

$$r \cap \pi_1 = \{(-3, -8, 6)\}.$$

Problema 5 · Estudio de una función racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}.$$

a) Dominio y cortes con los ejes

Una fracción está definida cuando su denominador no es cero:

$$x^2 - 4 \neq 0 \iff (x - 2)(x + 2) \neq 0.$$

Se excluyen $x = -2$ y $x = 2$, por lo que

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Para cortar el eje OX se necesitaría $f(x) = 0$, es decir, $x^2 + 3 = 0$. Como $x^2 \geq 0$, se tiene $x^2 + 3 > 0$ para todo real x ; no hay cortes con OX . Para cortar OY , ponemos $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \implies \left(0, -\frac{3}{4}\right).$$

b) Comprobar todas las asíntotas

Asíntotas verticales. Los únicos candidatos son los puntos excluidos del dominio. El numerador tiende a $7 > 0$ en $x = \pm 2$. El signo de $(x - 2)(x + 2)$ da los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Luego hay dos asíntotas verticales:

$$x = -2 \text{ y } x = 2.$$

Asíntota horizontal. Numerador y denominador tienen el mismo grado, así que comparamos los coeficientes principales; también se ve dividiendo todo entre x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 3/x^2}{1 - 4/x^2} = 1.$$

La asíntota horizontal es

$$y = 1.$$

No hay asíntota oblicua: al existir asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, la diferencia entre $f(x)$ y la recta límite tiende a cero.

c) Crecimiento, decrecimiento y extremos

El dominio se mantiene excluyendo $x = \pm 2$. Para derivar un cociente usamos $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Aquí $u = x^2 + 3$, $u' = 2x$, $v = x^2 - 4$ y $v' = 2x$:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{2x[(x^2 - 4) - (x^2 + 3)]}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}.$$

El denominador es un cuadrado y es positivo en todo punto del dominio. Por ello, el signo de f' depende únicamente de $-x$. Los puntos que separan los intervalos son los ceros de f' y los puntos excluidos del dominio:

$$-2, 0, 2.$$

Probamos un valor dentro de cada intervalo y calculamos el signo de la derivada:

$$f'(-3) = \frac{42}{25} > 0, f'(-1) = \frac{14}{9} > 0, f'(1) = -\frac{14}{9} < 0, f'(3) = -\frac{42}{25} < 0.$$

Intervalo **Valor de prueba** **Signo de f'** **Comportamiento**

$(-\infty, -2)$	-3	$+$	Creciente
$(-2, 0)$	-1	$+$	Creciente
$(0, 2)$	1	$-$	Decreciente
$(2, \infty)$	3	$-$	Decreciente

En $x = -2$ y $x = 2$ la función no está definida, así que no son máximos ni mínimos; solo separan los intervalos del dominio. En $x = 0$, la derivada cambia de positiva a negativa, por lo que hay un máximo relativo:

$$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\text{máximo relativo en } (0, -\frac{3}{4})}.$$

No hay mínimo relativo.

d) Calcular $\int f(x) dx$

Primero separamos la fracción para reconocer una integral inmediata y otra que admite fracciones simples:

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 4) + 7}{x^2 - 4} = 1 + \frac{7}{x^2 - 4}.$$

Factorizamos $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ y buscamos constantes A, B :

$$\frac{7}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}.$$

Al igualar numeradores,

$$7 = A(x + 2) + B(x - 2).$$

Con $x = 2$, $7 = 4A$, luego $A = 7/4$. Con $x = -2$, $7 = -4B$, luego $B = -7/4$. Integramos término a término:

$$\int f(x) dx = \int \left(1 + \frac{7}{4(x - 2)} - \frac{7}{4(x + 2)} \right) dx$$

$$= x + \frac{7}{4} \ln |x - 2| - \frac{7}{4} \ln |x + 2| + C.$$

Así, en cada intervalo del dominio,

$$\boxed{\int f(x) dx = x + \frac{7}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C.}$$

Problema 6 · Optimización del cable

Se reparte un cable de **240** m entre el perímetro de un triángulo equilátero y el de un cuadrado. Llamamos x (en metros) al lado del triángulo. El resto del cable forma el cuadrado.

a) Expresar la suma de las áreas en función de x

El triángulo usa $3x$ metros de cable. Si y es el lado del cuadrado, este usa $4y$ metros. La longitud total impone

$$3x + 4y = 240 \implies y = 60 - \frac{3}{4}x.$$

El área de un triángulo equilátero de lado x es $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, y la de un cuadrado de lado y es y^2 . Por tanto,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + y^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(60 - \frac{3}{4}x\right)^2. \end{aligned}$$

Para que ambas figuras tengan lados positivos, $x > 0$ y $y > 0$. De $60 - \frac{3}{4}x > 0$ resulta $x < 80$; el dominio del problema es $0 < x < 80$.

b) Hallar la longitud óptima y el área mínima

Derivamos la función que queremos minimizar:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\left(60 - \frac{3}{4}x\right)\left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8}\right)x - 90. \end{aligned}$$

Buscamos los puntos críticos igualando la derivada a cero:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8}\right)x - 90 = 0 \implies x = \frac{720}{9 + 4\sqrt{3}} \cdot \frac{9 - 4\sqrt{3}}{9 - 4\sqrt{3}} = \frac{2160 - 960\sqrt{3}}{11} = \frac{240}{11}(9 - 4\sqrt{3}) \text{ m.}$$

Este valor pertenece a $0 < x < 80$. La segunda derivada es

$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8} > 0,$$

de modo que el punto crítico es un mínimo. El cable destinado al triángulo es su perímetro $3x$:

$$3x = \frac{720}{11}(9 - 4\sqrt{3}) \text{ m} \approx 135,61 \text{ m.}$$

En ese caso, el lado del cuadrado es

$$y = 60 - \frac{3}{4}x = \frac{720\sqrt{3} - 960}{11} \text{ m} \approx 26,10 \text{ m.}$$

Para hallar el área mínima, usamos la condición $S'(x) = 0$, que equivale a $y = x/\sqrt{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} S_{\min} &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3} + 4}{12}x^2 \\ &= \frac{4800}{121}(3\sqrt{3} + 4)(9 - 4\sqrt{3})^2 \\ &= \frac{14400}{11}(3\sqrt{3} - 4) \text{ m}^2 \approx 1565,87 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Por tanto, para que la suma de áreas sea mínima, se deben reservar aproximadamente **135,61** m de cable para el triángulo equilátero; la suma mínima de áreas es aproximadamente **1565,87 m²**.