

PROBLEMA 1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los del tipo A los vende a 200 euros, los del tipo B a 500 euros y los del tipo C a 250 euros. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió ese mes del tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y de tipo C conjuntamente, calcula cuántos vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 73500 euros.

Solución:

Utilizamos las siguientes incógnitas:

$x = n^{\circ}$ de relojes del tipo A, 200€

$y = n^{\circ}$ de relojes del tipo B, 500€

$z = n^{\circ}$ de relojes del tipo C, 250€

De los datos del problema:

“un mes determinado vendió 200 relojes en total” $\rightarrow x + y + z = 200$

“la cantidad de los que vendió ese mes del tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y de tipo C conjuntamente” $\rightarrow y = x + z$; arreglando esta ecuación: $x - y + z = 0$

“la recaudación de ese mes fue de 73500 euros” $\rightarrow 200x + 500y + 250z = 73500$; simplificando por 10:

$$20x + 50y + 25z = 7350$$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ x - y + z = 0 \\ 20x + 50y + 25z = 7350 \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 50 & 25 & 7350 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 20F_1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -2 & 0 & -200 \\ 0 & 30 & 5 & 3350 \end{array} \right) \text{ y ya podemos resolver el sistema:}$$

De la 2ª fila $\rightarrow -2y = -200 \rightarrow y = 100$

De la 3ª fila $\rightarrow 30y + 5z = 3350$, sustituyendo el valor de obtenido anteriormente:

$$30 \cdot 100 + 5z = 3350$$

$$3000 + 5z = 3350$$

$$5z = 3350 - 3000$$

$$5z = 350$$

$$z = \frac{350}{5} = 70$$

De la 1ª fila $\rightarrow x + y + z = 200$, sustituyendo los valores obtenidos anteriormente:

$$x + 100 + 70 = 200$$

$$x + 170 = 200$$

$$x = 200 - 170$$

$$x = 30$$

Solución: vendió 30 relojes del tipo A, 100 relojes del tipo B y 70 relojes del tipo C.

* * * *

Resolviéndolo por el método de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 20 & 50 & 25 \end{vmatrix} = -25 + 50 + 20 + 20 - 50 - 25 = 40 - 50 = -10 \neq 0 \text{ por lo tanto resoluble por Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7350 & 50 & 25 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{C_2 + C_3 \begin{vmatrix} 200 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7350 & 75 & 25 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{- \begin{vmatrix} 200 & 2 \\ 7350 & 75 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-(15000 - 14700)}{-10} = \frac{-300}{-10} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 20 & 7350 & 25 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{C_3 - C_1 \begin{vmatrix} 1 & 200 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 20 & 7350 & 5 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{5 \begin{vmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{5(-200)}{-10} = 100$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 \\ 20 & 50 & 7350 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{C_2 + C_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 200 \\ 1 & 0 & 0 \\ 20 & 70 & 7350 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{- \begin{vmatrix} 2 & 200 \\ 70 & 7350 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-(14700 - 14000)}{-10} = \frac{-700}{-10} = 70$$

Solución: vendió 30 relojes del tipo A, 100 relojes del tipo B y 70 relojes del tipo C.

Tu Profeta al Rescate

PROBLEMA 2. Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Calcula:

- Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.

Solución:

Previamente obtengamos el dominio de esta función,

$$x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1. \quad \text{Luego } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

- a) Del cálculo del dominio deducimos que las posibles asíntotas verticales son $x = -1$ o $x = 1$, Veamos si $x = -1$ es a. v.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{1 - 1} = \frac{-1}{0} = \infty, \quad \text{luego } x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Veamos si $x = 1$ es a. v.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1^3}{1^2 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty, \quad \text{luego } x = 1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Calculemos la asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\text{Análogamente, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Por lo tanto esta función no tiene asíntota horizontal.

- b) Estudiemos el signo de y' ,

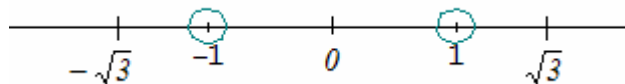
$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Busquemos las raíces del numerador y del denominador,

$$x^4 - 3x^2 = 0; \quad x^2(x^2 - 3) = 0; \quad \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

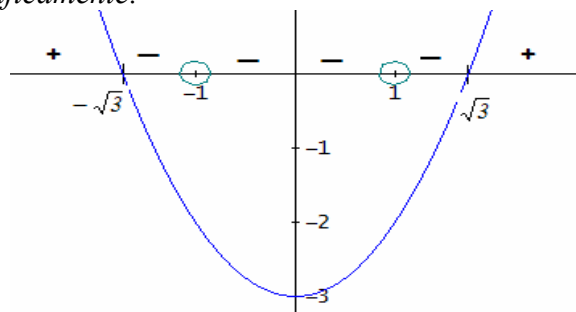
$$(x^2 - 1)^2 = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1$$

Representamos los raíces obtenidas y los valores que no son del dominio en la recta real,



El denominador de y' está elevado al cuadrado, siempre será positivo, por lo que el signo de y' sólo depende del numerador. El numerador es un producto, $x^2(x^2 - 3)$. Su primer factor, x^2 , es positivo; por lo tanto el signo de y' sólo depende de $(x^2 - 3)$ que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces $\pm\sqrt{3}$.

Gráficamente:

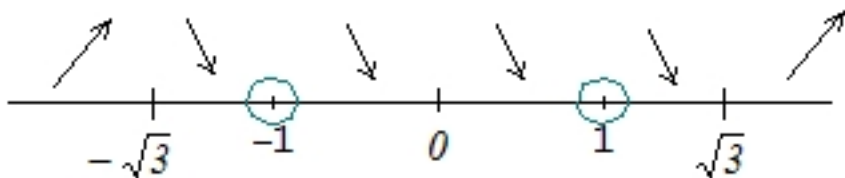


Finalmente:

$$f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$f(x) \text{ es decreciente en } (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$$

c) Del estudio del apartado anterior y considerando el dominio de $f(x)$



Luego $f(x)$ tiene un máximo local en $x = -\sqrt{3}$ y un mínimo local en $x = \sqrt{3}$.

Calculemos las ordenadas de estos extremos:

$$x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3(-\sqrt{3})}{3-1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, en $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ hay un máximo local y en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ hay un mínimo local.

Tu Profecia al Rescate

PROBLEMA 3. En un instituto se estudian tres modalidades de Bachillerato: Tecnología, Humanidades y Artes. El curso pasado el 25% de los alumnos estudió Tecnología, el 60% Humanidades y el 15% Artes. En la convocatoria de junio aprobó todas las asignaturas el 70% de los estudiantes de Tecnología, el 80% de los de Humanidades y el 90% de los de Artes. Si se elige un estudiante al azar del curso pasado de ese instituto:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado todas las asignatura en la convocatoria de junio?
- Si nos dice que ha aprobado todas las asignaturas en la convocatoria de junio, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado Humanidades?

Solución:

Usando los siguientes sucesos,

T = alumno que estudia Tecnología

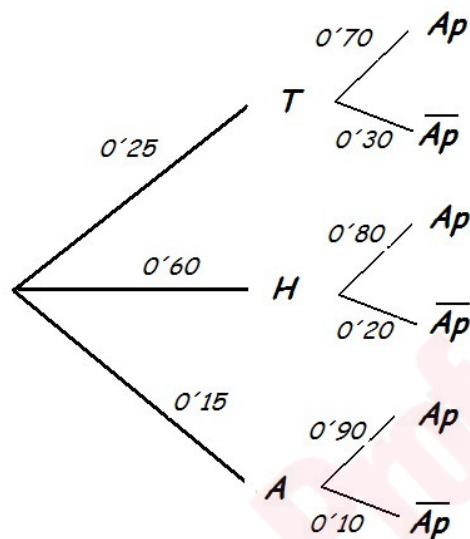
H = alumno que estudia Humanidades

A = alumno que estudia Artes

Ap = aprobar todas las asignaturas

$\overline{Ap}$ = no aprobar todas las asignaturas

El árbol del problema sería,



- Probabilidad de que no haya aprobado todas las asignatura en la convocatoria de junio, preguntan por $P(\overline{Ap})$,

$$P(\overline{Ap}) = 0.25 \cdot 0.30 + 0.60 \cdot 0.20 + 0.15 \cdot 0.10 = 0.21$$

- Preguntan por $P\left(\frac{H}{Ap}\right)$,

$$P\left(\frac{H}{Ap}\right) = \frac{P(H \cap Ap)}{P(Ap)} = \frac{0.60 \cdot 0.8}{1 - P(\overline{Ap})} = \frac{0.48}{1 - 0.21} = \frac{0.48}{0.79} = 0.6076$$

PROBLEMA 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de la matriz C.

b) Obtén la matriz X que verifica $A X + B^t = C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.*Solución:*a) *Cálculo de la matriz inversa de C,*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad |C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de C:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ cálculo de menores: } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ adjuntos: } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ traspuesta: } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$C^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\text{Por lo que: } C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

b) $\exists X?$ / $A X + B^t = C$,

$$\text{Veamos si la matriz } A \text{ tiene inversa, } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Multiplicando la expresión $A X + B^t = C$ por A^{-1} por la izquierda,

$$A^{-1} (A X + B^t) = A^{-1} C; \text{ efectuando el paréntesis,}$$

$$A^{-1} A X + A^{-1} B^t = A^{-1} C;$$

$$I X + A^{-1} B^t = A^{-1} C;$$

$$X + A^{-1} B^t = A^{-1} C;$$

$$X = A^{-1} C - A^{-1} B^t = A^{-1} (C - B^t)$$

Necesitamos calcular A^{-1} ,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ cálculo de menores: } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ adjuntos: } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ traspuesta: } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Procedamos al calculo de la matriz X :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA 2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 3]$.
- Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$.
- Calcula el área de la región determinada por la gráfica de la función y las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) $f(x)$ es una función definida a trozos, cada trozo es un polinomio luego cada trozo es continuo; el problema de continuidad está en el punto de cambio de definición, es decir, para $x = 1$. Estudiemos la continuidad en $x = 1$:

$$1^a) \quad f(1) = 1 - 1 = 0, \text{ luego } \exists f(1).$$

$$2^a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 - 2x + 3) = -1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 1 - 1 = 0 \end{cases} = 0,$$

$$3^a) \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, $f(x)$ es continua en $x = 1$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $[0, 3]$.

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ representamos gráficamente esta función.

Considerando que el primer trozo de $f(x)$ es una parábola y el segundo una línea recta obtendremos una tabla de valores de la función y calcularemos el vértice de la parábola.

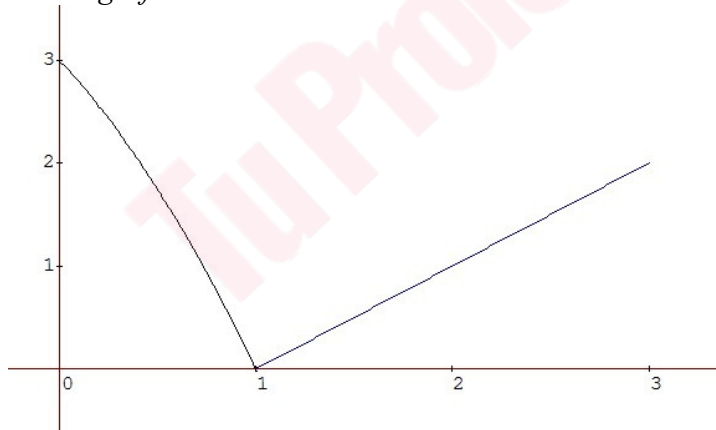
x	$f(x)$
0	$-0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$
1	0
3	$3 - 1 = 2$

Vértice de la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

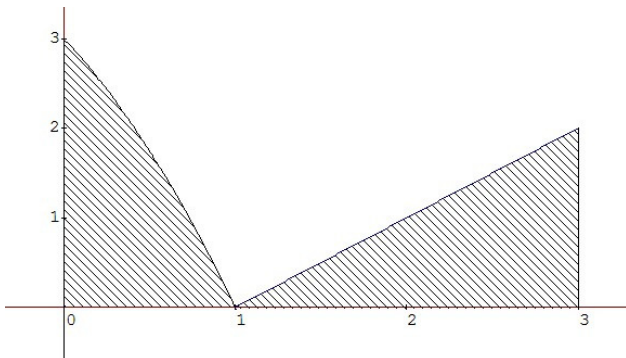
el vértice no es del dominio de la función $f(x)$

La representación gráfica será:



Por lo tanto, el máximo absoluto de $f(x)$ es el punto $(0, 3)$ y el mínimo absoluto es el punto $(1, 0)$.

c) El área a calcular es:



Este área podemos calcularla mediante las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx + \int_1^3 (x - 1) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{l^3}{3} - l^2 + 3.l \right) + \left(\frac{3^2}{2} - 3 \right) - \left(\frac{l^2}{2} - l \right) = \left(-\frac{l}{3} - l + 3 \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{l}{2} - l \right) = \left(-\frac{l}{3} + 2 \right) + \left(\frac{9-6}{2} \right) - \left(\frac{l-2}{2} \right) = \\
 &= \left(\frac{-l+6}{3} \right) + \frac{3}{2} - \left(\frac{-l}{2} \right) = \frac{5}{3} + \frac{3}{2} + \frac{l}{2} = \frac{5}{3} + \frac{4}{2} = \frac{5}{3} + 2 = \frac{5+6}{3} = \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

Finalmente este área mide $\frac{11}{3}u^2$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA 3. Se realiza un análisis de mercado para estudiar la aceptación de las revistas A y B. Este refleja que del total de entrevistados que conocen ambas revistas, al 75% les gusta la revista A, al 30% no les gusta la revista B y si les gusta la revista A y al 15% no les gusta ninguna de las dos. Suponiendo que estos datos son representativos de toda la población y que se ha elegido al azar un individuo que conoce ambas revistas, se pide

- La probabilidad de que le gusten las dos revistas.
- La probabilidad de que le guste la revista B.
- Si sabemos que le gusta la revista A, la probabilidad de que no le guste la revista B.

Solución:

Utilizamos os siguientes sucesos: $A = \text{le gusta la revista A}$ y $B = \text{le gusta la revista B}$

Vamos a resolver el problema de dos formas distintas: por probabilidades y por conjuntos.

Resolución por probabilidades.

De los datos del problema obtenemos:

“al 75% les gusta la revista A” $\rightarrow P(A) = 0.75$

“al 30% no les gusta la revista B y si la A” $\rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.3$

“al 15% no les gusta ninguna” $\rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.15$

a) Calcular $P(A \cap B)$

Como conocemos $P(A)$ y $P(A \cap \bar{B})$, procedemos como sigue:

Siendo E el suceso seguro, $A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

Como $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = A \cap \emptyset = \emptyset$ entonces $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

Sustituyendo las probabilidades conocidas: $0.75 = P(A \cap B) + 0.3 \rightarrow P(A \cap B) = 0.75 - 0.3 = 0.45$

Solución: $P(A \cap B) = 0.45$

b) Calcular $P(B)$.

Como $P(\overline{A \cup B}) = 0.15 \rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0.15 \rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.15 = 0.85$

Pero $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ sustituyendo los valores conocidos:

$$0.85 = 0.75 + P(B) - 0.45$$

$$0.85 = 0.3 + P(B)$$

$$P(B) = 0.85 - 0.3 = 0.55$$

Solución: $P(B) = 0.55$

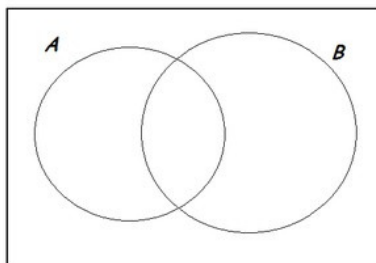
c) Calcular $P(\bar{B}/A)$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.75} = 0.4$$

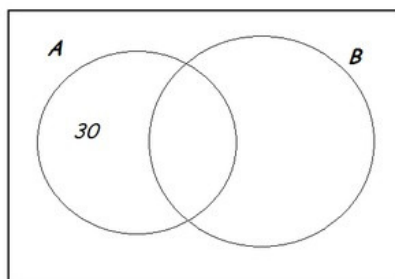
Solución: $P(\bar{B}/A) = 0.4$

Resolución por conjuntos.

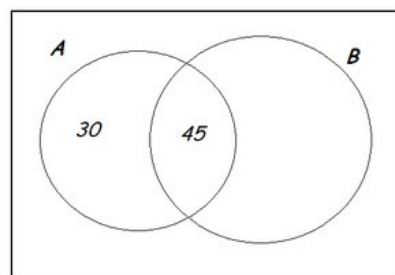
Gráficamente el problema es:



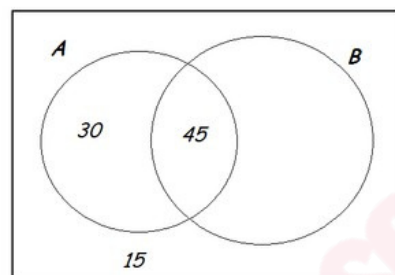
De los datos del problema obtenemos:
 “al 30% no les gusta la revista B y si la A”



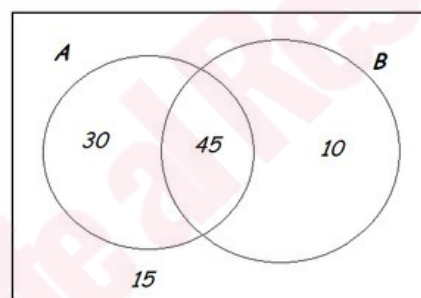
“al 75% les gusta la revista A”,
 $75 - 30 = 45$



“al 15% no les gusta ninguna”



Finalmente, $30 + 45 + 15 = 90$
 y $100 - 90 = 10$



a) Calcular $P(A \cap B)$

Solución: $P(A \cap B) = \frac{45}{100} = 0'45$

b) Calcular $P(B)$.

En B hay $45 + 10 = 55$,

Solución: $P(B) = \frac{55}{100} = 0'55$

c) Calcular $P\left(\frac{\bar{B}}{A}\right)$

$P\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = \frac{30}{75} = 0'4$