

Desarrollamos los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Excursiones y matrices

A) Sean x e y las excursiones de montaña y playa. Las limitaciones de autobuses y guías dan

$$2x + 2y \leq 10, \quad 2x + y \leq 8, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio es $B(x, y) = 700x + 500y$. Como es una función lineal, basta comparar sus valores en los vértices de la región factible. Estos son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 2)$ y $(0, 5)$; sus beneficios son, respectivamente, 0, 2800, 3100 y 2500 euros.

$$\boxed{3 \text{ excursiones de montaña y 2 de playa; } B_{\max} = 3100 \text{ €.}}$$

B) Para $2XA + B^tC = I$, primero aislamos el término con X :

$$X = \frac{1}{2}(I - B^tC)A^{-1}.$$

Con las matrices del enunciado, $B^tC = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$. Al multiplicar en ese orden se obtiene

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 19/4 & -5/4 \\ 1/2 & 3/4 & -1/12 \\ 2 & 7/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Para el apartado b),

$$AD = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 + 2z \\ 0 & 0 & 1 - 2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Las entradas no diagonales deben ser cero; ambas condiciones dan $z = 1/2$.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 19/4 & -5/4 \\ 1/2 & 3/4 & -1/12 \\ 2 & 7/4 & -1/4 \end{pmatrix}; \quad z = \frac{1}{2}.$$

Problema 2 · Desgaste y función racional

A) Para hallar cuándo coinciden los desgastes, igualamos

$$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}, \quad D_B(x) = \frac{x^2}{3000}, \quad 0 \leq x \leq 50.$$

Así, $30 + 29x = x^2$, es decir, $(x - 30)(x + 1) = 0$. Solo $x = 30$ pertenece al intervalo. Además, $D_A - D_B = \frac{(30 - x)(x + 1)}{3000}$: el neumático B se desgasta menos para $0 \leq x < 30$ y el A para $30 < x \leq 50$. El área entre las curvas se calcula integrando la diferencia no negativa en cada intervalo:

$$A_{B \text{ menos}} = \int_0^{30} (D_A - D_B) dx = \frac{1}{3000} \left[30x + \frac{29x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{30} = \frac{33}{20},$$
$$A_{A \text{ menos}} = \int_{30}^{50} (D_B - D_A) dx = \frac{1}{3000} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{29x^2}{2} - 30x \right]_{30}^{50} = \frac{133}{45}.$$

$$\boxed{\text{Coinciden a los 30 meses; } A_{B \text{ menos}} = \frac{33}{20}, \quad A_{A \text{ menos}} = \frac{133}{45}.$$

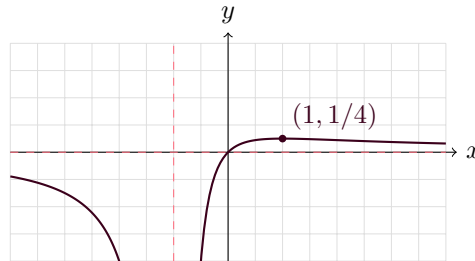
B) Simplificamos la expresión antes de estudiar la función:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1 + x^2}{2x^2 + 4x + 2} = \frac{x}{(x + 1)^2}.$$

El denominador se anula en $x = -1$, por lo que $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. El único corte con ambos ejes es $(0, 0)$. Como $f(x) \rightarrow +\infty$ al acercarnos a -1 por ambos lados y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, las asíntotas son $x = -1$ y $y = 0$. La derivada permite estudiar la monotonía:

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

En $(-\infty, -1)$ es negativa; en $(-1, 1)$, positiva; y en $(1, +\infty)$, negativa. Por tanto, la función decrece, crece y vuelve a decrecer en esos intervalos. El cambio de creciente a decreciente en $x = 1$ da un máximo local $f(1) = 1/4$; no hay mínimo local.



$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad AV : x = -1; \quad AH : y = 0; \quad \max_{\text{loc}} f = \frac{1}{4} \text{ en } x = 1.$
--

Problema 3 · Participación en actividades

Sean P «participa en la limpieza» y T «participa en la plantación». De 2000 personas, 100 no participaron en ninguna, así que

$$P(P \cup T) = \frac{2000 - 100}{2000} = \frac{19}{20}.$$

Solo limpieza participaron $800 - 300 = 500$ personas; solo plantación, $1400 - 300 = 1100$. Exactamente una actividad corresponde, por tanto, a 1600 personas. Para la última probabilidad, entre los $2000 - 1400 = 600$ que no plantaron, 100 tampoco limpiaron:

$$P(P \cap T^c) = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4}, \quad P(\text{exactamente una}) = \frac{1600}{2000} = \frac{4}{5}, \quad P(P^c | T^c) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}.$$

$P(P \cup T) = \frac{19}{20}; \quad P(P \cap T^c) = \frac{1}{4}; \quad P(\text{exactamente una}) = \frac{4}{5}; \quad P(P^c T^c) = \frac{1}{6}.$
--