

PAU Madrid - Matemáticas II

Acceso a la Universidad para mayores de 25 años - UC3M, 2025

El examen pide elegir una opción. Se resuelven ambas para repasar todos los ejercicios.

Opción A. Ejercicio 1. Sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & K & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A para separar el caso regular de los valores singulares:

$$\det A = -(K + 9).$$

Si $K \neq -9$, el determinante no se anula, por lo que $\text{rg}(A) = 3$, igual al número de incógnitas. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $K = -9$, el sistema se resuelve por sustitución: la segunda ecuación da $y = 2z$; al introducirlo en la primera, $x = 7z - 7$. En la tercera resulta

$$x + y - 9z = (7z - 7) + 2z - 9z = -7,$$

pero la ecuación exige que sea 4. Es una contradicción. El menor de las dos primeras filas y columnas de x, y vale -1 , de modo que $\text{rg}(A) = 2$; la contradicción hace que $\text{rg}(A^*) = 3$. Es un sistema incompatible. Eliminando en las tres ecuaciones, cuando $K \neq -9$ se obtiene además la solución única

$$(x, y, z) = \left(\frac{14 - 7K}{K + 9}, \frac{22}{K + 9}, \frac{11}{K + 9} \right).$$

Conclusión. El sistema es compatible determinado si $K \neq -9$ e incompatible si $K = -9$.

b) Solución cuando $K = 2$

De la segunda ecuación, $y = 2z$. La primera da $x = 7z - 7$. Sustituyendo en la tercera con $K = 2$:

$$(7z - 7) + 2z + 2z = 4 \implies 11z = 11 \implies z = 1.$$

Entonces $y = 2$ y $x = 0$. **Conclusión.** Para $K = 2$, la solución es $(x, y, z) = (0, 2, 1)$.

Opción A. Ejercicio 2. Plano que contiene dos rectas

La recta r se puede parametrizar tomando

$$t = x + 2 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z}{2}, \quad r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}.$$

Su vector director es $\vec{d} = (1, -1, 2)$. La recta s ya está en forma paramétrica y tiene el mismo vector director:

$$s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}.$$

Tomamos $R = (-2, -1, 0) \in r$ y $S = (1, 2, -1) \in s$. El vector que une ambos puntos es

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (1 - (-2), 2 - (-1), -1 - 0) = (3, 3, -1),$$

que no es proporcional a $\vec{d}$; así, las rectas son paralelas y distintas.

a) Plano que contiene a r y s

El plano debe contener la dirección $\vec{d}$ y el vector $\overrightarrow{RS}$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial, que es perpendicular a ambos:

$$\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{RS} = (1, -1, 2) \times (3, 3, -1) = (-5, 7, 6).$$

Usamos este vector normal y el punto R :

$$-5(x + 2) + 7(y + 1) + 6z = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano que contiene ambas rectas es $-5x + 7y + 6z - 3 = 0$.

b) Recta perpendicular al plano por $P = (1, 2, -1)$

Una recta perpendicular al plano tiene como vector director un vector normal del plano. Por tanto, usamos $\vec{n} = (-5, 7, 6)$ y el punto P :

$$\ell : \begin{cases} x = 1 - 5t, \\ y = 2 + 7t, \\ z = -1 + 6t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta perpendicular pedida es ℓ .

Opción A. Ejercicio 3. Dominio, asíntotas y tangente

La función es

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)}.$$

El denominador se anula en $x = 1$ y $x = 3$, mientras que el numerador no se anula en esos puntos; por ello,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

a) Asíntotas

En los puntos excluidos el cociente tiende a infinito. Cerca de $x = 1$ se comporta como $-\frac{3}{2(x-1)}$, y cerca de $x = 3$ como $\frac{7}{2(x-3)}$. En concreto,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Así, $x = 1$ y $x = 3$ son verticales. Como el grado del numerador es menor que el del denominador,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

por lo que $y = 0$ es horizontal en ambos extremos. Al haber asíntota horizontal no hay oblicua. **Conclusión.** Las asíntotas son $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$.

b) Tangente en $x = 2$

Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 3) - (2x + 1)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = -\frac{2(x^2 + x - 5)}{(x - 1)^2(x - 3)^2}.$$

El punto de tangencia es

$$f(2) = \frac{5}{-1} = -5, \quad f'(2) = -2.$$

Con pendiente -2 y pasando por $(2, -5)$:

$$y + 5 = -2(x - 2).$$

Conclusión. La recta tangente es $y = -2x - 1$.

Opción A. Ejercicio 4. Extremos, inflexión e integral

a) Máximo, mínimo y punto de inflexión de $g(x) = xe^{2x}$

Al ser producto de funciones definidas en $\mathbb{R}$, el dominio es $\mathbb{R}$. Derivamos para localizar los extremos:

$$g'(x) = e^{2x}(1 + 2x).$$

Como $e^{2x} > 0$, el único punto crítico es $x = -\frac{1}{2}$. La derivada es negativa antes y positiva después, de modo que allí se alcanza un mínimo:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

No hay máximo, pues $g(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Para encontrar el punto de inflexión estudiamos la segunda derivada:

$$g''(x) = 4e^{2x}(x + 1).$$

Su signo cambia de negativo a positivo en $x = -1$, donde $g(-1) = -e^{-2}$. **Conclusión.** Hay un mínimo en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e})$, no hay máximo y el punto de inflexión es $(-1, -e^{-2})$.

b) Integral definida

Integramos por partes el término $3x \operatorname{sen} x$ y directamente el término $\operatorname{sen} x$:

$$\int (3x + 1) \operatorname{sen} x \, dx = -3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x - \cos x + C.$$

Evaluamos entre 0 y π :

$$\int_0^\pi (3x + 1) \operatorname{sen} x \, dx = [-3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x - \cos x]_0^\pi = (3\pi + 1) - (-1) = 3\pi + 2.$$

Conclusión. El valor de la integral es $3\pi + 2$.

Opción B. Ejercicio 1. Operaciones y determinantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Producto $A^T BC$

Calculamos primero A^T y el producto $A^T B$; separar las multiplicaciones permite seguir sus dimensiones:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2K-1 & 2 \\ 0 & K & -2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos ahora por C :

$$A^T BC = \begin{pmatrix} 5 & 2K-1 & 2 \\ 0 & K & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2K+14 & 19-2K \\ K & -K-8 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $A^T BC = \begin{pmatrix} 2K+14 & 19-2K \\ K & -K-8 \end{pmatrix}.$

b) Valores de K para los que B tiene inversa

Calculamos el determinante de la matriz cuadrada B :

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4K - 2 = -2(2K + 1).$$

La matriz es invertible exactamente cuando este determinante no se anula. **Conclusión.** B tiene inversa si y solo si $K \neq -\frac{1}{2}$.

Opción B. Ejercicio 2. Planos paralelos y distancia

La recta está dada por

$$r : \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1}, \quad z = 3.$$

Tomando el valor común t , su forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

con vector director $\vec{d} = (2, -1, 0)$.

a) Plano por $P = (3, -1, 0)$ perpendicular a r

Si un plano es perpendicular a una recta, el vector director de la recta es normal al plano. Usamos $\vec{n} = (2, -1, 0)$ y el punto P en la ecuación punto-normal:

$$2(x - 3) - (y + 1) = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano es $\pi_1 : 2x - y - 7 = 0$.

b) Plano paralelo por $Q = (5, 1, -1)$ y distancia

El plano paralelo conserva el mismo vector normal. Al pasar por Q :

$$2(x - 5) - (y - 1) = 0 \implies \pi_2 : 2x - y - 9 = 0.$$

La distancia entre planos paralelos $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ es

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aquí $D_1 = -7$, $D_2 = -9$ y $(A, B, C) = (2, -1, 0)$, así que

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|-9 - (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Conclusión. El plano buscado es $2x - y - 9 = 0$ y la distancia entre ambos planos es $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Opción B. Ejercicio 3. Continuidad y derivabilidad

$$f(x) = \begin{cases} Ax - x^2, & x \leq 1, \\ \frac{B}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

En cada tramo la función es continua y derivable; el único punto que hay que comprobar es $x = 1$.

a) Condición para la continuidad

El valor por la izquierda y el límite por la derecha deben coincidir:

$$f(1) = A - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{B}{x} = B.$$

Por tanto, la función es continua si y solo si

$$B = A - 1.$$

Conclusión. La condición de continuidad es $B = A - 1$.

b) Condición adicional para la derivabilidad

Si la función es derivable, además de continua, sus derivadas laterales en 1 deben coincidir. En la rama izquierda $f'(x) = A - 2x$, mientras que en la derecha $f'(x) = -B/x^2$. Así,

$$A - 2 = -B.$$

Junto con $B = A - 1$:

$$A - 2 = -(A - 1) \implies 2A = 3 \implies A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. La función es derivable en toda $\mathbb{R}$ para $A = \frac{3}{2}$ y $B = \frac{1}{2}$.

Opción B. Ejercicio 4. Monotonía y primitiva

a) Crecimiento, decrecimiento y extremos de $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$

La función es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. El signo de la derivada determina la monotonía:

$$g'(x) = x^2 - 4x = x(x - 4).$$

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 4$. El producto es positivo en $(-\infty, 0)$, negativo en $(0, 4)$ y positivo en $(4, +\infty)$. Por tanto, la función crece, luego decrece y vuelve a crecer:

$$g(0) = 1, \quad g(4) = \frac{64}{3} - 32 + 1 = -\frac{29}{3}.$$

Conclusión. Hay un máximo relativo en $(0, 1)$ y un mínimo relativo en $(4, -\frac{29}{3})$. La función crece en $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$ y decrece en $(0, 4)$.

b) Primitiva

Separamos la integral en dos términos:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx.$$

En el primer término usamos $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$; el segundo es la primitiva conocida de $1/(1+x^2)$:

$$\int \frac{x+3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 3 \arctan x + C.$$

Conclusión. Una primitiva es $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 3 \arctan x + C$.