

Modelo 5 de 2001

Funciones definidas a trozos, optimización geométrica, sistemas lineales y distancias.

Opción A - Ejercicio 1

Para que la función sea derivable en 0, debe ser continua allí y tener derivadas laterales iguales. Ambas ramas tienden a 1 en 0, así que ya hay continuidad. Las derivadas en el punto son

$$\left. \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \right|_{x=0} = 1, \quad \left. \frac{d}{dx} (1 - mx - x^2) \right|_{x=0} = -m.$$

Al igualarlas resulta $m = -1$. Con ese valor,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x} + \int_0^1 (1+x-x^2) dx = \ln 2 + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \ln 2 + \frac{7}{6}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Sea r el radio del círculo y s el lado del cuadrado. Los trozos de alambre tienen longitudes $2\pi r$ y $4s$, así que

$$2\pi r + 4s = 1, \quad s = \frac{1 - 2\pi r}{4}.$$

La suma de las áreas es $S(r) = \pi r^2 + s^2$. Derivando, con $s'(r) = -\pi/2$,

$$S'(r) = 2\pi r - \pi s = \pi(2r - s).$$

El único punto crítico cumple $s = 2r$. Además $S''(r) = 2\pi + \pi^2/2 > 0$, por lo que la suma de áreas alcanza allí su mínimo. Queda probado que el lado del cuadrado debe ser el doble del radio. **Opción A - Ejercicio 3**

El sistema $AX = -AX + B$ equivale a $AX = B/2$. La matriz tiene determinante -5 , así que existe una solución única. Escribiendo las ecuaciones para $X = (x, y, z)^t$:

$$x + 2z = 2, \quad -x + y + z = 1/2, \quad 3x + y + 4z = 1/2.$$

De la segunda, $y = 1/2 + x - z$. Al sustituir en la tercera se obtiene $4x + 3z = 0$; junto con la primera, $x + 2z = 2$, resulta

$$z = \frac{8}{5}, \quad x = -\frac{6}{5}, \quad y = -\frac{23}{10}.$$

Por tanto, $X = (-6/5, -23/10, 8/5)^t$. **Opción A - Ejercicio 4**

Los cortes del plano $2x + y + 2z - 4 = 0$ con los ejes son $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ y $(0, 0, 2)$. Para el área del triángulo usamos la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8, 4, 8).$$

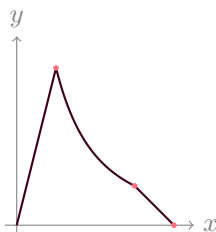
Así, el área es $\frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = \boxed{6}$. La distancia del origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es $|D|/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; por tanto,

$$d = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función es continua en los puntos de unión: en $x = 1$ las ramas valen 4, y en $x = 3$ valen 1. En cada tramo, la gráfica viene dada respectivamente por $y = 4x$, $y = 16/(x+1)^2$ e $y = 4 - x$. El área pedida se calcula sumando las integrales, pues $f(x) \geq 0$ en todo $[0, 4]$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 4x \, dx + \int_1^3 \frac{16}{(x+1)^2} \, dx + \int_3^4 (4-x) \, dx \\ &= 2 + \left[-\frac{16}{x+1} \right]_1^3 + \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = 2 + 4 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{2}}. \end{aligned}$$



Opción B - Ejercicio 2

El punto más cercano a $(2, 6)$ debe minimizar la distancia al cuadrado a un punto $(x, 3x - 2)$ de la recta, con $0 \leq x \leq 3$:

$$D(x) = (x - 2)^2 + (3x - 8)^2, \quad D'(x) = 2(x - 2) + 6(3x - 8) = 20x - 52.$$

El punto crítico es $x = 13/5$, que pertenece al intervalo; como $D''(x) = 20 > 0$, da el mínimo. Su ordenada es $3(13/5) - 2 = 29/5$. Por tanto, el punto pedido es $\boxed{(13/5, 29/5)}$. **Opción B - Ejercicio 3**

La condición de estar en el plano es $2x - y + 2z - 1 = 0$. Igualamos las distancias a $A = (3, 0, -2)$ y $B = (1, 2, 0)$ y elevamos al cuadrado:

$$(x - 3)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2.$$

Al simplificar se obtiene el plano mediador $x - y - z - 2 = 0$. Los puntos pedidos son la intersección de los dos planos. Restando sus ecuaciones se obtiene $x + 3z = -1$. Tomando $z = t$, resulta $x = -1 - 3t$ e $y = -3 - 4t$. La intersección, en forma paramétrica, es

$$\boxed{(x, y, z) = (-1, -3, 0) + t(-3, -4, 1), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Opción B - Ejercicio 4

El determinante de A depende de λ :

$$\det A = -(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

La matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, es decir, para $\boxed{\lambda = 1 \text{ o } \lambda = -1}$. En $\lambda = -2$ sí es invertible. Por reducción de Gauss (o comprobando el producto con A):

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}}.$$