

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Simetría, ángulo y volumen

El plano es $\pi: x + 3y + z - 4 = 0$, con vector normal $\vec{n} = (1, 3, 1)$.

a) **Simétrico del origen.** El pie de la perpendicular desde O al plano es

$$H = O - \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 4}{1^2 + 3^2 + 1^2} \vec{n} = \frac{4}{11} (1, 3, 1).$$

Como H es el punto medio entre O y su simétrico P , tenemos $P = 2H$. **Conclusión.** $P = (\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11})$.

b) **Ángulo entre planos.** El ángulo entre dos planos se toma como el ángulo agudo entre sus vectores normales. El plano $x = 0$ tiene normal $\vec{m} = (1, 0, 0)$, así que

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{m}\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Conclusión. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

c) **Volumen.** Los cortes del plano con los ejes son $(4, 0, 0)$, $(0, \frac{4}{3}, 0)$ y $(0, 0, 4)$. El volumen del tetraedro con vértice adicional en el origen es un sexto del producto de los interceptos:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{32}{9}.$$

Conclusión. El volumen es $\frac{32}{9}$ unidades cúbicas.

Opción A - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array} \right).$$

El determinante es

$$\det A = -4\lambda(\lambda - 1)(5\lambda - 1).$$

Si $\lambda \neq 0, 1, \frac{1}{5}$, el determinante es no nulo y el sistema es compatible determinado.

Para $\lambda = 0$, la tercera ecuación queda $0 = 9$, luego el sistema es incompatible. Para $\lambda = 1$, el menor de las filas primera y segunda y columnas primera y tercera vale -6 , así que el rango de A es 2. En los coeficientes se verifica $6F_3 = 5F_1 + 4F_2$, pero en los términos independientes $6 \cdot 9 \neq 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1$; por tanto, el rango de la ampliada es 3 y el sistema es incompatible.

Para $\lambda = \frac{1}{5}$, el menor de las dos primeras filas y columnas primera y tercera vale $-\frac{6}{5}$, mientras que $\det A = 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$. En los coeficientes se cumple $6F_3 = F_1 + 4F_2$, pero los términos independientes no respetan esa relación: $6 \cdot 9 \neq 2\lambda + 4\lambda = \frac{6}{5}$. Luego $\text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema también es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $\lambda \neq 0, 1, \frac{1}{5}$ y SI si $\lambda = 0, 1$ o $\frac{1}{5}$.

b) **Resolución para $\lambda = -1$.** El sistema queda

$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z = -2, \\ -x + y + z = -1, \\ -4x - 4y - z = 9. \end{cases}$$

La solución es $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$, que se comprueba al sustituirla en las tres ecuaciones. **Conclusión.** Para $\lambda = -1$, $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

Opción A - Ejercicio 3. Límite exponencial

Consideramos

$$L_\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}.$$

Para una base que tiende a 1, estudiamos el logaritmo del límite:

$$\ln L_\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right).$$

Si $\alpha \neq 0$, el término dentro del logaritmo añadido a 1 es del orden de $1/x^2$, por lo que el producto con $x+1$ tiende a cero; entonces $L_\alpha = 1$. Si $\alpha = 0$, usando $\ln(1+u) \sim u$ cuando $u \rightarrow 0$:

$$\ln L_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{4x+8} = \frac{1}{4},$$

y así $L_0 = e^{1/4}$. **Conclusión.** El límite es $e^{1/4}$ si $\alpha = 0$ y 1 si $\alpha \neq 0$.

Opción A - Ejercicio 4. Integral definida con extremo variable

Integramos por partes dos veces. Una primitiva de $t^2 e^{-t}$ es $-e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$, pues su derivada es $t^2 e^{-t}$. Por tanto,

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt = [-e^{-t}(t^2 + 2t + 2)]_0^x = 2 - e^{-x}(x^2 + 2x + 2).$$

Conclusión. $F(x) = 2 - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

Opción B - Ejercicio 1. Plano, distancia y corte de rectas

Parametrizamos

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, 3, 1), \quad s : (x, y, z) = (-2, 0, 2) + u(2, 1, 1).$$

a) Plano que contiene a r y es paralelo a s . El plano debe contener las dos direcciones; un vector normal es

$$(2, 3, 1) \times (2, 1, 1) = (2, 0, -4) \sim (1, 0, -2).$$

Usando el punto $(1, 2, 0)$ de r , obtenemos la ecuación general del plano. **Conclusión.** $\pi : x - 2z - 1 = 0$.

b) Distancia entre las rectas. Los vectores directores no son proporcionales y el producto mixto no es nulo, así que son alabeadas. Con $P = (1, 2, 0) \in r$, $Q = (-2, 0, 2) \in s$ y $\vec{n} = (2, 3, 1) \times (2, 1, 1) = (2, 0, -4)$, la fórmula de distancia es

$$d(r, s) = \frac{|(Q - P) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-3, -2, 2) \cdot (2, 0, -4)|}{2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Conclusión. La distancia entre r y s es $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

c) Recta por el origen paralela a r . Esa recta es $(x, y, z) = (2t, 3t, t)$. Para cortar a s debería existir u tal que

$$(2t, 3t, t) = (-2 + 2u, u, 2 + u).$$

Las dos primeras coordenadas dan $u = 3t$ y $t = \frac{1}{2}$, es decir, $u = \frac{3}{2}$. La tercera coordenada exigiría $\frac{1}{2} = 2 + \frac{3}{2}$, que es falso. **Conclusión.** La recta paralela a r que pasa por el origen no corta a s .

Opción B - Ejercicio 2. Estudio de una función a partir de su derivada

Se conoce $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$. Los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 5$. El signo de f' es positivo en $(-\infty, 1)$, negativo en $(1, 5)$ y positivo en $(5, +\infty)$. **Conclusión.** f crece en $(-\infty, 1)$ y $(5, +\infty)$, y decrece en $(1, 5)$. Tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

Para localizar inflexiones derivamos de nuevo:

$$f''(x) = 4(x-1)^2(x-4).$$

En $x = 1$ no cambia de signo, mientras que en $x = 4$ sí cambia; por tanto, el punto de inflexión corresponde a $x = 4$.

Integramos f' para recuperar la función:

$$f'(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 \implies f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C.$$

La condición $f(0) = 0$ da $C = 0$. Así, $f(1) = \frac{6}{5}$, $f(5) = -550$ y $f(4) = -\frac{156}{5}$. **Conclusión.** El máximo relativo es $(1, \frac{6}{5})$, el mínimo relativo es $(5, -550)$ y el punto de inflexión es $(4, -\frac{156}{5})$.

Opción B - Ejercicio 3. Discusión de un sistema

El sistema tiene tres ecuaciones y dos incógnitas. De la primera y la tercera,

$$2x - y = \lambda, \quad 3x - y = 2,$$

se obtiene $x = 2 - \lambda$ e $y = 4 - 3\lambda$. Sustituimos en la segunda ecuación:

$$\lambda(2 - \lambda) - 2(4 - 3\lambda) = 4 \iff (\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0.$$

Solo para esos dos valores las tres ecuaciones son compatibles; como las dos primeras ecuaciones independientes determinan x, y , en ambos casos la solución es única. **Conclusión.** Para $\lambda = 2$, $(x, y) = (0, -2)$; para $\lambda = 6$, $(x, y) = (-4, -14)$. Para los demás valores, el sistema es incompatible.

Opción B - Ejercicio 4. Rango e inversa de una matriz

La matriz puede escribirse $A = (a - 1)I + J$, donde J es la matriz de unos. Su determinante se factoriza como

$$\det A = (a - 1)^2(a + 2).$$

Si $a \neq 1, -2$, el rango es 3. Para $a = 1$, todas las filas coinciden y el rango es 1. Para $a = -2$, el determinante se anula, pero el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale 3; por tanto, el rango es 2. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $a \neq 1, -2$, es 1 si $a = 1$ y es 2 si $a = -2$.

Cuando $a = -1$, la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

Usando la fórmula de la inversa, o comprobando por multiplicación,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Esta es la inversa de A para $a = -1$.