

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^t D = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C . (2 puntos)
 b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente. (0,5 puntos)

Solución:

a) ¿ X ? / $4XB + C^t D = I$

Despejemos X : $4XB = I - C^t D$; $XB = \frac{1}{4}(I - C^t D)$; multiplicando por B^{-1} por la derecha (si existe)

$$XB B^{-1} = \frac{1}{4}(I - C^t D)B^{-1}; \quad X = \frac{1}{4}(I - C^t D)B^{-1}$$

Veamos si existe B^{-1} :

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$$

Cálculo de B^{-1} :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X :

$$C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}(I - C^t D)B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 8/40 & 6/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 1/5 & 3/20 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -7/40 & -9/40 \\ 1/5 & 3/20 \end{pmatrix}.$

b) ¿ z ? / FC es idempotente.

$$F C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F C)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F C)^2 = F C \rightarrow \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1+z=1 \\ z^2=z \\ 1=1 \text{ identidad} \\ 0=0 \text{ identidad} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+z=1 \\ z^2=z \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $z = 0$,

de la 2ª ecuación: $z(z-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} z=0 \\ z-1=0; \quad z=1 \end{cases}$

La solución común de las dos ecuaciones es $z = 0$ que es la solución del sistema.

Solución: la matriz FC es idempotente para $z = 0$.

Tu Prof te al Rescate

Problema 1. B. Una granja desea crear una mezcla fertilizante líquida utilizando dos compuestos comerciales, NutriMax y BioGrow. Cada litro de estos compuestos aporta diferentes cantidades de unidades de nitrógeno, fósforo y potasio. Para que el cultivo sea productivo, los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo 8 unidades de nitrógeno, 6 unidades de fósforo y 10 unidades de potasio. Se sabe que un litro de NutriMax contiene 2 unidades de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 1 unidad de potasio, mientras que un litro de BioGrow contiene 1 unidad de nitrógeno, 1 unidad de fósforo y 2 unidades de potasio. El coste de un litro de NutriMax es de 5 euros y el de BioGrow es de 4 euros.

- a) ¿Cuántos litros de cada producto han de utilizarse para que el coste de la mezcla sea mínimo? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

Solución:

Llamando: $x = \text{litros de NutriMax}$

$y = \text{litros de BioGrow}$

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

		unidades/l			
	litros	Nitrógeno	Fósforo	Potasio	Coste
NutriMax	x	2	1	1	5€/ litro
BioGrow	y	1	1	2	4€/ litro
Necesidades mínimas		8	6	10	

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

los agrónomos han determinado que se deben aplicar al terreno como mínimo:

$$8 \text{ unidades de nitrógeno} \rightarrow 2x + y \geq 8$$

$$6 \text{ unidades de fósforo} \rightarrow x + y \geq 6$$

$$10 \text{ unidades de potasio} \rightarrow x + 2y \geq 10$$

Como las variables x e y representan litros $x, y \geq 0$.

El coste viene dado por la función: $z = 5x + 4y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar } z = 5x + 4y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $2x + y \geq 8$

$$2x + y = 8$$

x	y
0	8
4	0

¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 0 \geq 8 \quad \text{No}$$

(b) $x + y \geq 6$

$$x + y = 6$$

x	y
0	6
6	0

¿(0,0) cumple?

$$0 + 0 \geq 6 \quad \text{No}$$

(c) $x + 2y \geq 10$

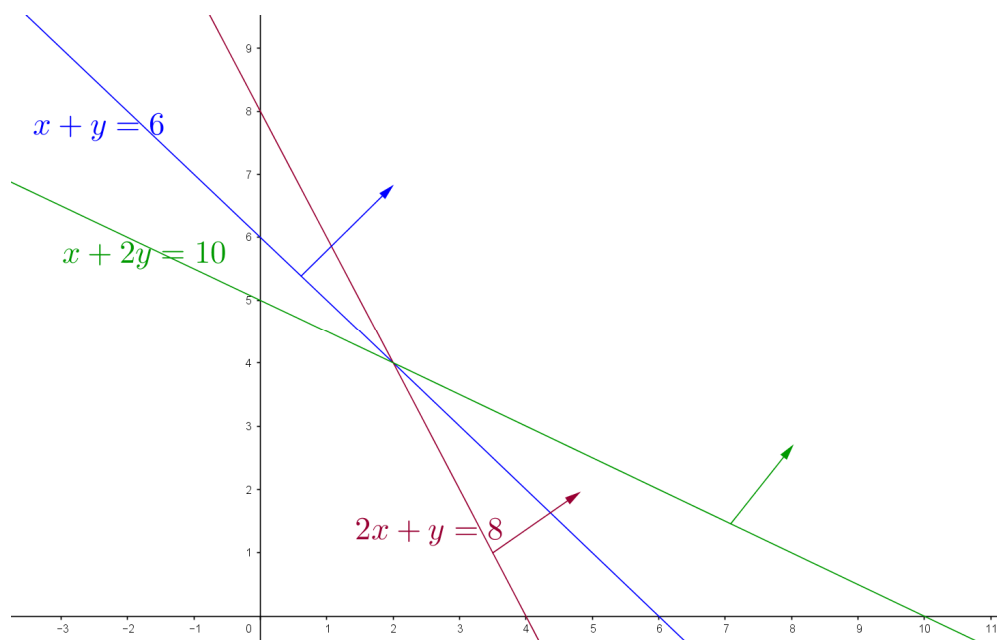
$$x + 2y = 10$$

x	y
0	5
10	0

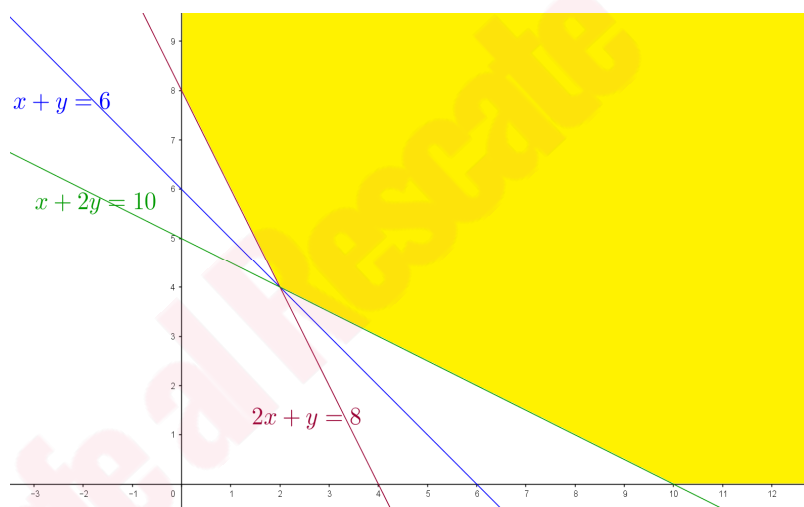
¿(0,0) cumple?

$$0 + 2 \cdot 0 \geq 10 \quad \text{No}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son $A(0, 8)$ y $C(10, 0)$.

Punto B, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \end{matrix} \quad \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x - y = -6 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } x = 2$$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación: $2 + y = 6$; $y = 6 - 2$; $y = 4 \rightarrow B(2, 4)$

Comprobemos que este punto B también es de la recta (c): $(x + 2y = 10)$ $2 + 2 \cdot 4 = 10$ Sí

Por tanto, los vértices de la región factible son $A(0, 8)$, $B(2, 4)$ y $C(10, 0)$.

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 5x + 4y$	
$0, 8$	$5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 = 32$	
$2, 4$	$5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 26$	mínimo
$10, 0$	$5 \cdot 10 + 4 \cdot 0 = 50$	

El mínimo se alcanza en el punto $(2, 4)$

Por tanto,

- a) Han de utilizarse 2 litros de NutriMax y 4 de BioGrow para que el coste de la mezcla se mínimo.*
- b) Dicho coste mínimo será de 26€.*

Tu Profe al Rescate

Problema 2. A. El valor de mercado de una empresa (en millones de euros) depende del tiempo t (en años) y viene dado por la función:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{a}{t} + 2, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ ct + \frac{b}{t^2}, & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

Se pide:

- Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c . (1 punto)
- La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo. (1 punto)
- Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado. (0'5 puntos)
- El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente. (1 punto)

Solución:

- a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que $g'(3) = 23/27$, determina a , b y c .

$t^2 + 2 \quad 0 \leq t \leq 1$ es continua por ser un polinomio.

$\frac{a}{t} + 2 \quad 1 < t \leq 2$ es continua ya que $t \neq 0$

$ct + \frac{b}{t^2} \quad 2 < t \leq 4$ es continua ya que $t \neq 0$

Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en $t = 1$,

a) $g(1) = 1^2 + 2 = 3$

$$b) \lim_{t \rightarrow 1} g(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (t^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left(\frac{a}{t} + 2 \right) = \frac{a}{1} + 2 = a + 2 \end{cases} \quad \text{para que exista el límite } 3 = a + 2; \quad a = 1$$

Continuidad en $t = 2$,

a) $g(2) = \frac{a}{2} + 2$

$$b) \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{a}{t} + 2 \right) = \frac{a}{2} + 2 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(ct + \frac{b}{t^2} \right) = c \cdot 2 + \frac{b}{2^2} = 2c + \frac{b}{4} \end{cases} \quad \text{para que exista el límite}$$

$$\frac{a}{2} + 2 = 2c + \frac{b}{4}; \quad 2a + 8 = 8c + b \quad (\text{como } a = 1) \quad 2 \cdot 1 + 8 = 8c + b; \quad 10 = 8c + b.$$

Como $g'(3)=23/27$

$$\text{En un entorno de } t=3, \quad g(t)=ct+\frac{b}{t^2} \rightarrow g'(t)=c+\frac{-b \cdot 2t}{(t^2)^2}=c-\frac{2b}{t^3}$$

$$g'(3)=c-\frac{2b}{3^3}=c-\frac{2b}{27} \rightarrow c-\frac{2b}{27}=\frac{23}{27}; \quad 27c-2b=23$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 8c+b=10 \\ 27c-2b=23 \end{cases} \quad 2xI^a \begin{cases} 16c+2b=20 \\ 27c-2b=23 \end{cases}$$

$$\text{sumando: } 43c=43; \quad c=\frac{43}{43}=1$$

Sustituyendo este valor de c en la 1ª ecuación: $8 \cdot 1 + b = 10$; $b = 10 - 8 = 2$

Solución: $a=1$, $b=2$ y $c=1$.

b) La empresa ha tenido tres gerentes, el primero cuando $t \in [0,1]$, el segundo cuando $t \in (1,2]$ y el tercero cuando $t \in (2,4]$. Determina si con todos los gerentes el valor de mercado ha ido creciendo.

Veamos el crecimiento-decrecimiento de $g(t)$

$$g(t)=\begin{cases} t^2+2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t}+2, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ t+\frac{2}{t^2}, & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

En $(0,1)$, $g(t)=t^2+2$; $g'(t)=2t$, como $t \in (0,1)$ $2t > 0$, $g(t)$ creciente.

En $(1,2)$, $g(t)=\frac{1}{t}+2$; $g'(t)=\frac{-1}{t^2}$, $t \in (1,2) \rightarrow t^2 > 0 \rightarrow g'(t) < 0$, $g(t)$ decreciente.

En $(2,4)$, $g(t)=t+\frac{2}{t^2}$; $g'(t)=1-\frac{4}{t^3}=\frac{t^3-4}{t^3}$, $t \in (2,4) \rightarrow t^3 > 0$,

$t^3-4 > 0$, $t^3-4=0$; $t^3=4$; $t=\sqrt[3]{4} \cong 1.587$, $1.587 < 2$ por lo que debemos estudiar el signo de $g'(t)$ en $(2,4)$; $g'(3)=1-\frac{4}{3^3}=0.851 > 0 \rightarrow g(t)$ es creciente.

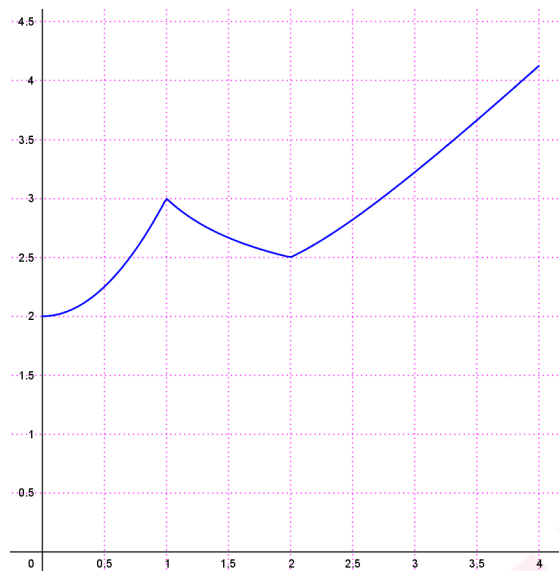
Solución: el valor de mercado de la empresa creció con el primer y tercer gerentes y decreció con el segundo gerente.

c) Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos para el valor de mercado.

Responderemos a partir de su representación gráfica.

1 ^{er} tramo		2 ^{er} tramo		3 ^{er} tramo	
t	g(t)	t	g(t)	t	g(t)
0	$0^2 + 2 = 2$	1	$\frac{1}{1} + 2 = 3$	2	$2 + \frac{2}{2^2} = 2'5$
1	$1^2 + 2 = 3$	2	$\frac{1}{2} + 2 = 2'5$	4	$4 + \frac{2}{4^2} = 4'125$

Considerando el estudio de crecimiento-decrecimiento del apartado anterior. La gráfica será:



A partir de la gráfica $g(t)$ tiene un mínimo absoluto en $(0, 2)$, un máximo absoluto en $(4, 4'125)$, un máximo relativo en $(1, 3)$ y un mínimo relativo en $(2, 2'5)$.

d) El salario de un gerente al año es cien mil veces la integral de la función g durante el período que ha estado. Calcula el salario del primer gerente.

El primer gerente estuvo en el período $[0, 2]$. Su salario lo obtendremos a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (t^2 + 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right) - (0) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$\text{Su salario será: } 100000 \frac{7}{3} = 233333'333...$$

Solución: el salario del primer gerente será de 233 333'33€.

Problema 2. B. Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos I (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $I(x)=400x$, y su función de gastos G (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $G(x)=4x^2+100$.

- Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa. (1 punto)
- El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima. (1'5 puntos)
- Calcula. $\int_0^2 G(x)^2 dx$ (1 punto)

Solución:

Llamando $B(x)$ al beneficio proporcionado por x unidades,

$$B(x) = I(x) - G(x) = 400x - 4x^2 - 100$$

Como x es datos en terabytes, entonces $\text{Dom } B(x) = [0, +\infty)$

- a) ¿ x ? / maximiza el beneficio $B(x)$.

Estudiamos la monotonía de $B(x)$,

$$B'(x) = 400 - 8x$$

$400 - 8x = 0$; $8x = 400$; $x = \frac{400}{8} = 50$, debemos estudiar el signo de $B'(x)$ en los intervalos:

x	$B'(x)$
10	$400 - 8 \cdot 10 = 320 > 0$
60	$400 - 8 \cdot 60 = -80 < 0$

En $x = 50$ hay un máximo relativo que, además, es el absoluto de $B(x)$ ya que la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.

Solución: la cantidad de datos que maximiza el beneficio de la empresa son 50 terabytes.

- b) El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima.

Llamando $E(x)$ a la eficiencia financiera, $E(x) = \frac{I(x)}{G(x)} = \frac{400x}{4x^2 + 100}$

Máximo de $E(x)$. Estudiamos el signo de $E'(x)$:

$$E(x) = \frac{400x}{4x^2 + 100} \rightarrow$$

$$E'(x) = \frac{400(4x^2 + 100) - 400x \cdot 8x}{(4x^2 + 100)^2} = \frac{1600x^2 + 40000 - 3200x^2}{(4x^2 + 100)^2} = \frac{-1600x^2 + 40000}{(4x^2 + 100)^2}$$

$$E'(x) = 0; \quad \frac{-1600x^2 + 40000}{(4x^2 + 100)^2}; \quad -1600x^2 + 40000 = 0; \quad 1600x^2 = 40000; \quad x^2 = \frac{40000}{1600}; \quad x^2 = 25$$

$$(como \ x > 0) \quad x = \sqrt{25} = 5$$

Hay que estudiar el signo de $E'(x)$ en los intervalos: $(0, 5)$ y $(5, +\infty)$

x	$E'(x)$
1	$\frac{-1600 \cdot 1^2 + 40000}{(4 \cdot 1^2 + 100)^2} = \frac{600}{169} > 0$
6	$\frac{-1600 \cdot 6^2 + 40000}{(4 \cdot 6^2 + 100)^2} = \frac{-1100}{3721} < 0$

Luego, en $x = 5$ hay un máximo relativo que es el absoluto de $E(x)$ ya que la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

$$\text{Para } x = 5, \quad E(5) = \frac{400 \cdot 5}{4 \cdot 5^2 + 100} = 10.$$

Solución: la eficiencia financiera es máxima para 5 terabytes y es de 10.

c)

$$\begin{aligned} \int_0^2 [G(x)]^2 dx &= \int_0^2 [4x^2 + 100]^2 dx = \int_0^2 [16x^4 + 800x^2 + 10000] dx = \left[\frac{16x^5}{5} + \frac{800x^3}{3} + 10000x \right]_0^2 = \\ &= \left(\frac{16 \cdot 2^5}{5} + \frac{800 \cdot 2^3}{3} + 10000 \cdot 2 \right) - (0) = \frac{333536}{15} = 22235'7333 \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \int_0^2 [G(x)]^2 dx = 22235'7333.$$

Problema 3. En una empresa de pinturas se sabe que hay tres tipos de empleados: becarios, aprendices y maestros. El 50% de los empleados son becarios y el 35% aprendices. Entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores y entre los maestros tan solo el 15% no tiene estudios superiores. Se sabe que el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores. Seleccionamos al azar un empleado de esta empresa.

- Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz. (1 punto)
- Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que sea aprendiz? (1 punto)
- Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz". (1 punto)

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

B = empleado becario

A = empleado aprendiz

M = empleado maestros

E = el empleado tiene estudios superiores

$\bar{E}$ = el empleado no tiene estudios superiores

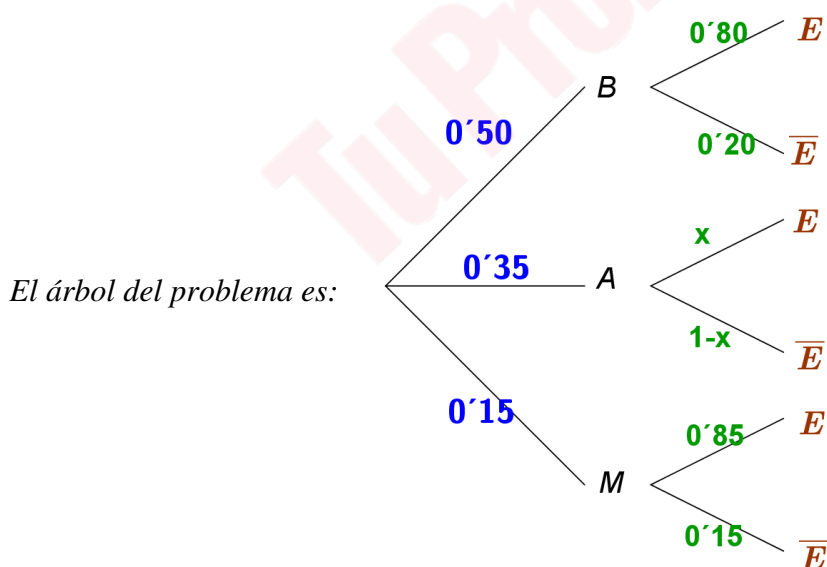
De los datos del problema:

"El 50% de los empleados son becarios y el 35% aprendices" $\rightarrow$ serán maestros: $100 - 50 - 35 = 15$ (15%)
 $\rightarrow P(B) = 0.50$, $P(A) = 0.35$ y $P(M) = 0.15$

"entre los becarios, el 80% tiene estudios superiores" $\rightarrow$ becarios $P(E) = 0.80$ y $P(\bar{E}) = 1 - 0.80 = 0.20$

"entre los maestros el 15% no tiene estudios superiores" $\rightarrow$ maestros $P(\bar{E}) = 0.15$ y $P(E) = 1 - 0.15 = 0.85$

"se sabe que el 79% de los empleados de la empresa tiene estudios superiores" $\rightarrow P(E) = 0.79$

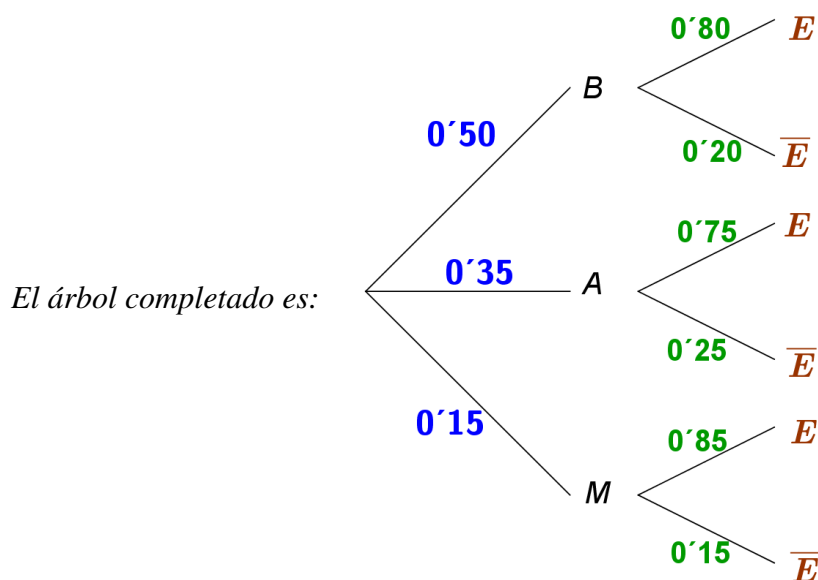


El valor de x lo obtenemos a partir del dato $P(E) = 0.79$

$$0.50 \cdot 0.80 + 0.35x + 0.15 \cdot 0.85 = 0.79; \quad 0.40 + 0.35x + 0.1275 = 0.79;$$

$$0.35x = 0.79 - 0.40 - 0.1275$$

$$0.35x = 0.2625; \quad x = \frac{0.2625}{0.35} = 0.75 \quad \text{y} \quad 1 - x = 1 - 0.75 = 0.25$$



- a) Calcula la probabilidad de que el empleado seleccionado tenga estudios superiores y sea aprendiz.

La probabilidad pedida es $P(A \cap E) = 0.35 \cdot 0.75 = 0.2625$

Solución: la probabilidad pedida es 0.2625.

- b) Si sabemos que el empleado no tiene estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que sea aprendiz?

La probabilidad pedida es $P\left(\frac{A}{\bar{E}}\right) = \frac{P(A \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0.35 \cdot 0.25}{1 - 0.79} = \frac{5}{12} \cong 0.4167$

Solución: la probabilidad pedida es $\frac{5}{12} \cong 0.4167$.

- c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "el empleado seleccionado es aprendiz o becario" y "el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz"

Consideramos los sucesos:

$F = \text{"el empleado seleccionado es aprendiz o becario"} = A \cup B$

$G = \text{"el empleado seleccionado tiene estudios superiores o es aprendiz"} = E \cup A$

La intersección de estos dos sucesos será:

$$F \cap G = (A \cup B) \cap (E \cup A) =$$

aplicando la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección de sucesos,

$$= [A \cap (E \cup A)] \cup [B \cap (E \cup A)] =$$

por simplificación: $A \cap (E \cup A) = A$

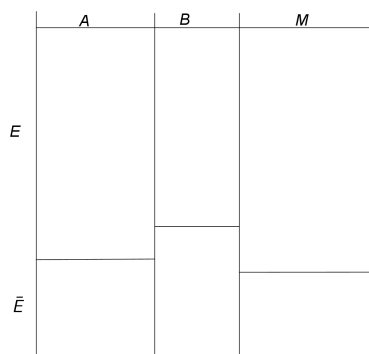
$$= A \cup (B \cap E) \cup (B \cap A) = (A \text{ y } B \text{ son sucesos incompatibles} \rightarrow B \cap A = \emptyset) = A \cup (B \cap E) \cup \emptyset = A \cup (B \cap E)$$

Por lo tanto, $F \cap G = A \cup (B \cap E)$

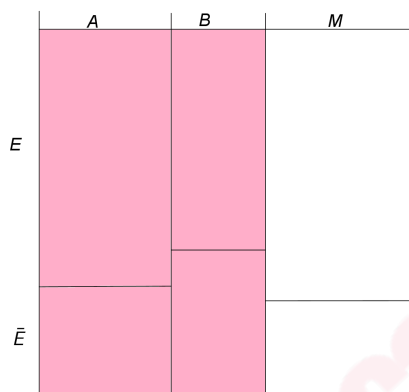
$$\begin{aligned} P(A \cup (B \cap E)) &= P(A) + P(B \cap E) - P(A \cap (B \cap E)) = (A \text{ y } B \text{ son sucesos incompatibles} \rightarrow A \cap B \cap E = \emptyset) = \\ &= P(A) + P(B \cap E) - P(\emptyset) = 0.35 + 0.50 \cdot 0.80 - 0 = 0.75 \end{aligned}$$

Solución: la probabilidad de la intersección de los dos sucesos es 0.75.

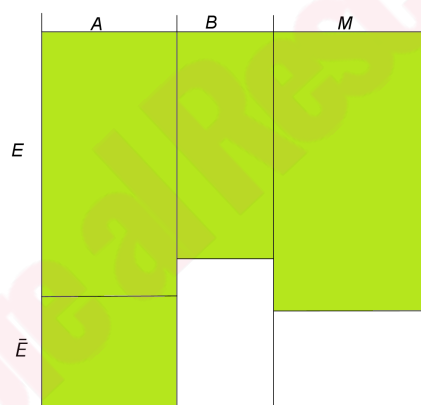
Otra forma de resolverlo sería utilizando los diagramas de Venn.



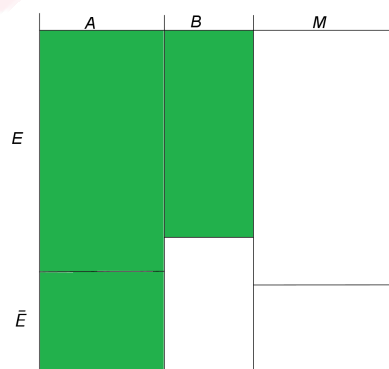
El diagrama de Venn del problema sería:



El suceso $F = A \cup B$ sería:



El suceso $G = E \cup A$ sería:



Y la intersección de estos dos sucesos:

Por lo tanto, $F \cap G = A \cup (B \cap E)$ y $P(F \cap G) = 0'35 + 0'50 \cdot 0'80 = 0'75$.