

MADRID · PAU 2018 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas CCSS

10 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

El examen incluye tabla N(0,1) como anexo. Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada. CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos. TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M .

a) 1 punto

Calcúlese la matriz $[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t]^{11}$.

b) 1 punto

Determinense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X .

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= a \\ 2x + ay - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

a) 1 punto

Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a .

b) 1 punto

Resuélvase para $a = 4$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 4; \quad x + 2y \leq 12; \quad x \leq 4; \quad -x + 2y \leq 12\}$$

a) 1 punto

Representese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) 1 punto

Determinense los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S , indicando el valor de f en dichos puntos.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) 1 punto

Determinése, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?

b) 1 punto

Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Considérese la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{1-4x^2}$.

a) 1 punto

Determinése los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

b) 1 punto

Estúdiense las asíntotas de f .

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & \text{si } x < 0, \\ \frac{2}{3+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) 1 punto

Determinése el dominio de $f(x)$ y estúdiense su continuidad.

b) 1 punto

Calcúlese $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) 1 punto

Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) 1 punto

Si el 65% de los participantes son hombres y el 35% mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,8$. Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S .

a) 1 punto

Calcúlese $P(\bar{A} \cap B)$.

b) 1 punto

Calcúlese $P(\overline{A \cup B} \mid A)$.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) 1 punto

Determinése el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95% para μ sea a lo sumo de 23550 km.

b) 1 punto

Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\bar{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P , que estarían dispuestos a comprarlo.

a) 1 punto

Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determinése el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 3% ($\pm 3\%$).

b) 1 punto

Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90% para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.