



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la única función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f''(x) = e^x(x+2)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- a) Determina los valores de m para los que AB no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
- b) Determina los valores de m para los que BA no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
- c) Para $m = 0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX = C$ y halla una solución en la que $x + y + z = 0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(t, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, 3, -t-1)$.

- a) Calcula el valor o valores de t para que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D sea 5 unidades cúbicas. **(1.25 puntos)**
- b) Para $t = 0$, calcula la distancia del punto A a la recta determinada por los puntos B y C . **(1,25 puntos)**



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020**

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto crítico en $x = 0$, que su gráfica pasa por $(0, 3)$ y que la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula a , b , c y d .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que la matriz X verifica que $X^3AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante. **(1 punto)**
- b) Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1} = A$. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(0, 1, -2)$ y los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$.

- a) Halla el punto simétrico de A respecto de π_1 . **(1.5 puntos)**
- b) Determina la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y π_2 . **(1 punto)**

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿Es $x = -1$ asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿Es $x = 1$ asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

b) Busco los valores que anulan la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos: $x = -\sqrt{3} \approx -1.73$, $x = 0$, $x = \sqrt{3} \approx 1.73$. En $x = -1$ y $x = 1$ la función no existe.

Estudiamos el cambio del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{(-2)^4 - 3(-2)^2}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{4}{9} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -\sqrt{3})$.

- En $(-\sqrt{3}, -1)$ tomamos $x = -1.5$ y la derivada vale

$$f'(-1.5) = \frac{(-1.5)^4 - 3(-1.5)^2}{((-1.5)^2 - 1)^2} = \frac{-27}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\sqrt{3}, -1)$$

- En $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^4 - 3(-0.5)^2}{((-0.5)^2 - 1)^2} = \frac{-11}{4} < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0)$$

- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{(0.5)^4 - 3(0.5)^2}{((0.5)^2 - 1)^2} = \frac{-11}{4} < 0$. La

función decrece en $(0, 1)$

- En $(1, \sqrt{3})$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{(1.5)^4 - 3(1.5)^2}{((1.5)^2 - 1)^2} = \frac{-27}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, \sqrt{3})$

- En $(\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{(2)^4 - 3(2)^2}{((2)^2 - 1)^2} = \frac{4}{9} > 0$. La

función crece en $(\sqrt{3}, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la única función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple que $f(0)=1$, $f'(0)=1$ y

$$f''(x) = e^x(x+2).$$

Si $f''(x) = e^x(x+2)$ entonces su integral es $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x) dx = \int e^x(x+2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+2 \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (x+2)e^x - \int e^x dx = \\ &= (x+2)e^x - e^x = (x+1)e^x + C \end{aligned}$$

Como sabemos que $f'(0)=1$ debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = (x+1)e^x + C \\ f'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = (0+1)e^0 + C \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f'(x) = (x+1)e^x$$

Si $f'(x) = (x+1)e^x$ entonces su integral es la función $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x+1)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (x+1)e^x - \int e^x dx = \\ &= (x+1)e^x - e^x = xe^x + K \end{aligned}$$

También sabemos que $f(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = xe^x + K \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 0e^0 + K \Rightarrow 1 = K \Rightarrow \boxed{f(x) = xe^x + 1}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- a) Determina los valores de m para los que AB no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
 b) Determina los valores de m para los que BA no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
 c) Para $m = 0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX = C$ y halla una solución en la que $x + y + z = 0$. **(1 punto)**

- a) Para que la matriz AB no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+1 & 0+m+1 \\ 1+0+1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m - 2 = -2m$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow -2m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

La matriz AB no tiene inversa cuando $m = 0$.

- b) Para que la matriz BA no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 2+1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|BA| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 3m - 2 + m + 3 + 4 - 2m + 2 - 2m = 0$$

La matriz BA tiene determinante nulo, independientemente del valor de m , por lo que no tiene inversa para cualquier valor de m .

- c) Para $m = 0$ la matriz BA queda $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema $BAX = C$ sería:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \{1^a \text{ y } 2^a \text{ ecuación son semejantes}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2 - z - 2x \\ 3x + y + 2z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 2 - z - 2x + 2z = 3 \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow y = 2 - z - 2(1 - z) = 2 - z - 2 + 2z = z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = 1 - \alpha$; $y = \alpha$; $z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si le añadimos la condición $x + y + z = 0$ tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \alpha + \alpha + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - (-1) = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

La solución buscada es $x = 2$; $y = -1$; $z = -1$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(t, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, 3, -t-1)$.

- a) Calcula el valor o valores de t para que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D sea 5 unidades cúbicas. **(1.25 puntos)**
 b) Para $t = 0$, calcula la distancia del punto A a la recta determinada por los puntos B y C . **(1.25 puntos)**

- a) El volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BD}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= (-1, 0, 2) - (0, 1, 1) = (-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{BA} &= (t, 2, -1) - (0, 1, 1) = (t, 1, -2) \\ \overrightarrow{BD} &= (2, 3, -t-1) - (0, 1, 1) = (2, 2, -t-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ t & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= t + \cancel{2} + \cancel{4} + 2t - \cancel{2} + t(-t-2) - \cancel{4} = t + \cancel{2t} - t^2 - \cancel{2t} = -t^2 + t$$

Como el volumen debe ser 5 tenemos:

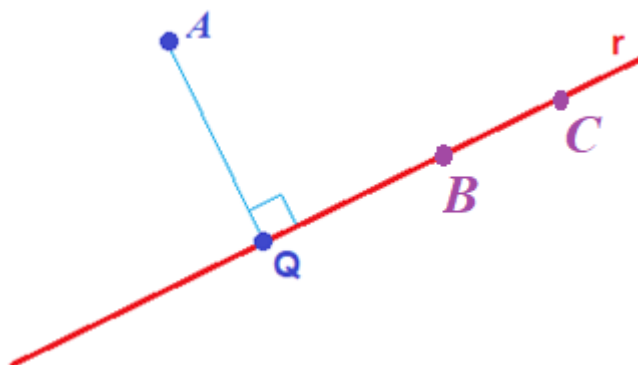
$$\text{Volumen} = \frac{[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}]}{6} = \frac{|-t^2 + t|}{6} \Rightarrow \frac{|-t^2 + t|}{6} = 5 \Rightarrow |-t^2 + t| = 30 \Rightarrow$$

Volumen = 5

$$\Rightarrow \begin{cases} -t^2 + t = 30 \rightarrow -t^2 + t - 30 = 0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(-30)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{-119}}{-2} = \text{¡Im posible!} \\ -t^2 + t = -30 \rightarrow -t^2 + t + 30 = 0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(30)}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+11}{-2} = -5 \\ \frac{-1-11}{-2} = 6 \end{cases} \end{cases}$$

Los valores de t buscados son $t = -5$ y $t = 6$.

- b) Hallamos el punto Q del dibujo determinando el plano π perpendicular a la recta r y que contiene el punto A . Después hallamos el punto de corte Q de recta y plano.



La recta r determinada por los puntos B y C tiene como vector director $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(0,1,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{BC} = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El plano π tendrá como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 2, -1) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0, 2, -1) \in \pi \\ \pi \equiv -x - y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -x - y + z + 3 = 0$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x - y + z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - (1 - \lambda) + 1 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(1, 2, 0)$$

La distancia del punto A a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ} = (1, 2, 0) - (0, 2, -1) = (1, 0, 1)$$

$$\boxed{\text{Distancia}(A, r) = |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ u}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

Si llamamos r a la recta definida por los puntos B y C podemos utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, -1) - (0, 1, -2) = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - k + j - i = -2i + j - k = (-2, 1, -1)$$

$$\text{Distancia}(A, r) = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{2} \text{ u}}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto crítico en $x = 0$, que su gráfica pasa por $(0, 3)$ y que la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula a , b , c y d .

Si la función tiene un punto crítico en $x = 0$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(0) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + bx^2 + d$.

Si su gráfica pasa por $(0, 3)$ significa que $f(0) = 3$.

$$f(0) = 3 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + d \Rightarrow \boxed{d = 3}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3$.

Si la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ significa que la derivada en $x = 1$ vale -2 (pendiente de la recta tangente) $\rightarrow f'(1) = -2$. También la recta tangente y la función coinciden en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = -2 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = 3a(1)^2 + 2b(1) \Rightarrow \boxed{-2 = 3a + 2b}$$

La recta tangente $y = -2x + 2$ en $x = 1$ toma el valor $y = -2 + 2 = 0$. La función pasa por el punto de tangencia $(1, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + 3 \\ \text{La función pasa por } (1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = a + b + 3}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} -2 = 3a + 2b \\ 0 = a + b + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2 = 3a + 2b \\ -b - 3 = a \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = 3(-b - 3) + 2b \Rightarrow -2 = -3b - 9 + 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = -b \Rightarrow \boxed{b = -7} \Rightarrow \boxed{a = 7 - 3 = 4}$$

Los valores buscados son $a = 4$, $b = -7$, $c = 0$ y $d = 3$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x^2 - 2ax \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(3x - 2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2a = 0 \rightarrow 3x = 2a \rightarrow x = \frac{2}{3}a \end{cases}$$

El área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y $\frac{2}{3}a$.

$$\int_0^{2a/3} 3x^2 - 2ax dx = \left[x^3 - ax^2 \right]_0^{2a/3} = \left[\left(\frac{2}{3}a \right)^3 - a \cdot \left(\frac{2}{3}a \right)^2 \right] - [0^3 - a \cdot 0^2] = \frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{9}a^3 = -\frac{4}{27}a^3$$

$$\text{Área} = \left| -\frac{4}{27}a^3 \right| = \{a > 0\} = \frac{4}{27}a^3$$

Igualamos el área a 4.

$$\text{Área} = 4 = \frac{4}{27}a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{27 \cdot 4}{4} = 27 \rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$$

El valor buscado es $a = 3$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que la matriz X verifica que $X^3AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante. **(1 punto)**
 b) Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1} = A$. **(1.5 puntos)**

- a) Calculamos el determinante de A y de B .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes en la igualdad $X^3AX = B^2$.

$$|X^3AX| = |B^2| \Rightarrow |X^3| \cdot |A| \cdot |X| = |B|^2 \Rightarrow |X|^3 \cdot |A| \cdot |X| = |B|^2 \Rightarrow |X|^3 \cdot 1 \cdot |X| = (-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |X|^4 = 4 \Rightarrow |X| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{|X| = \pm\sqrt{2}}$$

- b) Multiplicamos por la matriz B en ambos miembros de la igualdad $A^2YB^{-1} = A$.

$$A^2YB^{-1}B = AB \Rightarrow A^2Y = AB$$

Como la matriz A tiene determinante no nulo tiene matriz inversa A^{-1} . Multiplicamos la igualdad anterior por la inversa de A .

$$A^{-1}A^2Y = A^{-1}AB \Rightarrow A^{-1}AA^2Y = A^{-1}AB \Rightarrow AY = B$$

Volvemos a multiplicar por la inversa de A .

$$A^{-1}AY = A^{-1}B \Rightarrow Y = A^{-1}B$$

Calculamos la inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de Y .

$$Y = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-0 \\ -2+2 & -1+0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

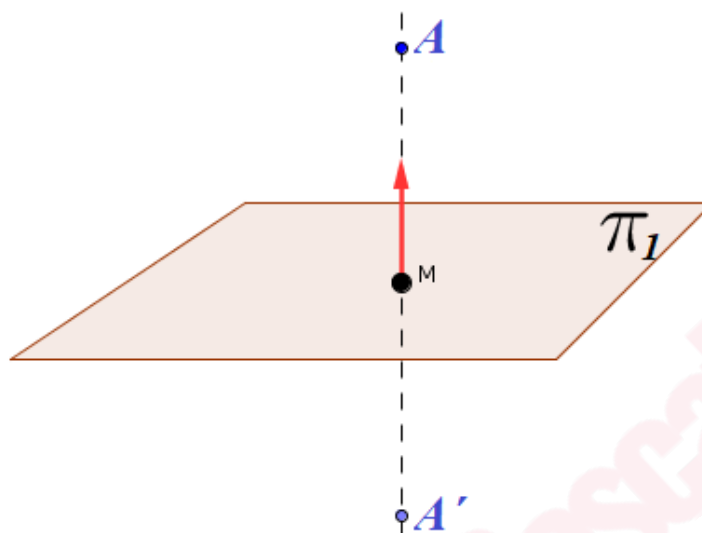
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(0, 1, -2)$ y los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$.

a) Halla el punto simétrico de A respecto de π_1 . (1.5 puntos)

b) Determina la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y π_2 . (1 punto)

a) Deseamos hallar el punto A' simétrico de A respecto del plano π_1



Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto A . Dicha recta tendrá como vector director el normal del plano.

$$\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -1, -1)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n}_1 = (2, -1, -1) \\ A(0, 1, -2) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4\alpha - (1 - \alpha) - (-2 - \alpha) + 5 = 0 \Rightarrow 4\alpha - 1 + \alpha + 2 + \alpha + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2(-1) = -2 \\ y = 1 - (-1) = 2 \\ z = -2 - (-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-2, 2, -1)$$

El punto A' se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = (-2, 2, -1) - (0, 1, -2) = (-2, 1, 1)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (-2, 2, -1) + (-2, 1, 1) \Rightarrow \boxed{A' = (-4, 3, 0)}$$

- b) Si una recta es paralela a π_1 y π_2 su vector director será perpendicular a los vectores normales de los planos. Este vector es el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -1, -1) \\ \pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, 5, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_r = 6i - j + 10k + k + 12j + 5i = 11i + 11j + 11k = (11, 11, 11)$$

Hallamos la ecuación de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} A(0, 1, -2) \in r \\ \vec{v}_r = (11, 11, 11) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{11} = \frac{y-1}{11} = \frac{z+2}{11} \Rightarrow \boxed{r \equiv x = y - 1 = z + 2}$$