

Modelo 3 de 2008

Se estudian asíntotas, integrales, modelización aritmética, optimización y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por el exponente $1/x$. Para estudiar la posible asíntota vertical calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 0^-.$$

Como uno de los límites es infinito, $x = 0$ es asíntota vertical (por la derecha).

Para $x \rightarrow \pm\infty$, $e^{1/x} = 1 + 1/x + o(1/x)$, luego

$$f(x) = x e^{1/x} = x + 1 + o(1).$$

Por tanto, en ambos extremos la asíntota oblicua es $y = x + 1$; no hay asíntota horizontal. **Opción A - Ejercicio 2**

Factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones simples para integrar:

$$\frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} = \frac{1}{x(x - 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Una primitiva es $\ln|x| - \ln|x - 1| - 1/(x - 1)$. Evaluando en los extremos,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x - 1)} = \left[\ln|x| - \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} \right]_{-2}^{-1} = \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{6}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Sean n_{10}, n_{20}, n_{50} los números de billetes de 10, 20 y 50 euros. Se cumple

$$n_{10} + n_{20} + n_{50} = 130, \quad 10n_{10} + 20n_{20} + 50n_{50} = 3000.$$

Si $n_{10} = 3n_{50}$, poniendo $n_{50} = c$ queda $n_{20} = 130 - 4c$. El importe sería

$$10(3c) + 20(130 - 4c) + 50c = 2600,$$

independientemente de c . No puede ser 3000, así que la condición es imposible.

Si $n_{10} = 2n_{50}$, entonces $n_{20} = 130 - 3c$ y el valor total es

$$10(2c) + 20(130 - 3c) + 50c = 2600 + 10c = 3000.$$

De aquí $c = 40$, luego $n_{10} = 80$ y $n_{20} = 10$. El cajero contiene 80, 10 y 40 billetes de 10, 20 y 50 euros, respectivamente. **Opción A - Ejercicio 4**

La recta r pasa por $P = (1, -1, 2)$ y tiene vector director $\vec{d} = (2, 3, 1)$. Para obtener un plano que contenga la recta y el origen, usamos los vectores $\vec{OP} = P$ y $\vec{d}$. Su producto vectorial es normal al plano:

$$P \times \vec{d} = ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) = (-7, 3, 5).$$

Así, la ecuación del plano que pasa por el origen es $-7x + 3y + 5z = 0$.

Un plano que pasa por el origen y es perpendicular a r tiene como vector normal el director de la recta. Por tanto,

$$\text{2x + 3y + z = 0}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sean $a, b > 0$ los lados del rectángulo. El perímetro 8 impone $2a + 2b = 8$, luego $a + b = 4$. Para minimizar la diagonal $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ basta minimizar d^2 :

$$d^2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 16 - 2ab.$$

Como $(a - b)^2 \geq 0$, se tiene $ab \leq 4$, con igualdad cuando $a = b = 2$. Entonces d^2 alcanza su mínimo y

$$\boxed{a = b = 2, \quad d = 2\sqrt{2}}.$$

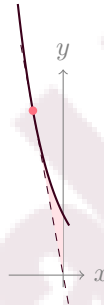
Opción B - Ejercicio 2

La curva $f(x) = e^{-2x}$ y su tangente se tocan en $x = -1/2$: $f(-1/2) = e$ y $f'(-1/2) = -2e$. La ecuación de la tangente es

$$y - e = -2e \left(x + \frac{1}{2} \right), \quad \text{es decir, } y = -2ex,$$

como se pedía comprobar. Entre $x = -1/2$ y el eje y (esto es, $x = 0$), la exponencial queda por encima de la tangente; el área es

$$\int_{-1/2}^0 (e^{-2x} + 2ex) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2 \right]_{-1/2}^0 = \boxed{\frac{e-2}{4}}.$$



Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m \end{pmatrix}.$$

La tercera fila de A es m veces la primera, así que $\det A = 0$ para todo m y, por tanto, $\operatorname{rg}(A) < 3$ para cualquier real m . La matriz ampliada del sistema pedido es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera ecuación impone $x + y + z = 1$ y la tercera impone $m(x + y + z) = 1$. Si $m \neq 1$, estas dos condiciones son incompatibles: $\operatorname{rg}(A^*) > \operatorname{rg}(A)$ y el sistema es SI.

Para precisar los rangos, si $m = 0$, $\operatorname{rg}(A) = 1$ y la segunda fila ampliada contiene $0 = 1$, por lo que $\operatorname{rg}(A^*) = 2$. Si $m \neq 0, 1$, el menor de A formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 vale $m^2 - m = m(m - 1) \neq 0$; como la tercera fila es múltiplo de la primera, $\operatorname{rg}(A) = 2$. La incompatibilidad anterior eleva el rango ampliado a 3, de modo que también es SI.

Para $m = 1$, todas las ecuaciones se reducen a $x + y + z = 1$. En este caso $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 1 < 3$, por lo que el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son

$$(x, y, z) = (1 - s - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Sea $C = (t, 0, 0)$, pues debe pertenecer al eje x . Con $A = (2, 1, 1)$ y $B = (0, 0, 1)$,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (t - 2, -1, -1).$$

El área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -2, t), \quad [ABC] = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 + t^2}.$$

Imponemos el área 2:

$$\frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 5} = 2 \iff t^2 = 11 \iff t = \pm \sqrt{11}.$$

Los puntos buscados son $C_1 = (\sqrt{11}, 0, 0)$, $C_2 = (-\sqrt{11}, 0, 0)$.