

Se desarrollan los apartados A) y B) cuando el examen permite elegir, para ofrecer una resolución completa.

Ejercicio 1

Apartado A · Matrices y sistemas

Sean

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Rango de A . Para que una matriz cuadrada de orden 3 tenga rango 3, su determinante debe ser distinto de cero. Desarrollando por la segunda fila,

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) - 2 = m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1).$$

Por tanto, $\det A \neq 0$ cuando $m \neq -2$ y $m \neq 1$.

$$\operatorname{rg}(A) = 3 \iff m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

b) Valores para los que A no tiene inversa. Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Por tanto,

$$A \text{ no tiene inversa} \iff \det A = 0 \iff (m+2)(m-1) = 0.$$

$$m = -2 \quad \text{o} \quad m = 1.$$

c) Cálculo de A^{-1} y resolución de $X \cdot A = C$, para $m = 2$. Al sustituir $m = 2$, la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 4 \neq 0.$$

Así, existe A^{-1} . Calculando la inversa,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Como $XA = C$, multiplicamos por A^{-1} por la derecha y obtenemos $X = CA^{-1}$. Entonces

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

d) Clasificación de $AY = B$, para $m = 1$. En este caso,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema equivalente es

$$x + z = 3, \quad y = 2, \quad 2x + 2z = 6.$$

La tercera ecuación es el doble de la primera; por eso no aporta una condición nueva. El sistema es compatible y tiene una variable libre: por ejemplo,

$$(x, y, z) = (t, 2, 3 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión: el sistema es compatible indeterminado (SCI), pues los dos rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas.

Apartado B · Programación lineal

La función objetivo es $f(x, y) = 2x + y$. Como es lineal, sus extremos en la región factible se alcanzan en sus vértices. Hallamos primero las intersecciones de las rectas frontera:

$$4x + 2y = 5, \quad 2x + 5y = 9, \quad x + y = 3, \quad y = 0.$$

De $4x + 2y = 5$ con $y = 0$ resulta $P_1 = (\frac{5}{4}, 0)$. La intersección de las dos primeras rectas se obtiene resolviendo

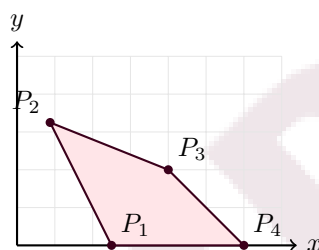
$$\begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 2x + 5y = 9 \end{cases} \Rightarrow P_2 = \left(\frac{7}{16}, \frac{13}{8}\right).$$

Las rectas $2x + 5y = 9$ y $x + y = 3$ se cortan en $P_3 = (2, 1)$, y $x + y = 3$ corta al eje X en $P_4 = (3, 0)$. Los cuatro puntos cumplen las desigualdades, por lo que son los vértices de la región.

Para el apartado b), fijamos la abscisa en $x = 1$. Si elegimos $y = 1$, se verifican las cuatro restricciones:

$$4(1) + 2(1) = 6 \geq 5, \quad 2(1) + 5(1) = 7 \leq 9, \quad 1 + 1 = 2 \leq 3, \quad 1 \geq 0.$$

Por tanto, $(1, 1)$ es un punto de la región factible.



Evaluamos f en los vértices:

(x, y)	$P_1 = (\frac{5}{4}, 0)$	$P_2 = (\frac{7}{16}, \frac{13}{8})$	$P_3 = (2, 1)$	$P_4 = (3, 0)$
$f(x, y) = 2x + y$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	5	6

El mínimo vale $\frac{5}{2}$. Además, en el segmento P_1P_2 se cumple $4x + 2y = 5$, es decir, $2x + y = \frac{5}{2}$, así que todos sus puntos minimizan la función. El máximo se alcanza en P_4 .

$$f_{\min} = \frac{5}{2} \text{ en todo el segmento } P_1P_2; \quad f_{\max} = 6 \text{ en } (3, 0).$$

Ejercicio 2 · Función de pérdida de peso

La función es

$$P(t) = 75 - \frac{15t}{t + 120}, \quad t \geq 0.$$

El tiempo solo puede ser no negativo y, en ese dominio, $t + 120 \neq 0$.

a) Descenso del peso y valor límite. Para comprobar si el peso disminuye calculamos la derivada:

$$P'(t) = -15 \frac{(t + 120) - t}{(t + 120)^2} = -\frac{1800}{(t + 120)^2} < 0 \quad (t \geq 0).$$

Por tanto, P es estrictamente decreciente. Si la dieta continúa indefinidamente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 75 - 15 = 60.$$

El peso se aproxima a 60 kg sin llegar a alcanzarlo en un tiempo finito; ese es su límite inferior.

$$P \text{ disminuye y } \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 60 \text{ kg.}$$

b) Tiempo para alcanzar 64 kg. Igualamos el peso a 64 y despejamos t :

$$64 = 75 - \frac{15t}{t + 120} \Rightarrow 11(t + 120) = 15t \Rightarrow 11t + 1320 = 15t \Rightarrow t = 330.$$

$$t = 330 \text{ días.}$$

c) Umbral de sobrepeso. El índice es $i(t) = P(t)/h^2$, y hay sobrepeso cuando $i(t) > 25$. Para $h = 1,68$ m, el peso límite correspondiente es

$$P(t) = 25h^2 = 25(1,68)^2 = 70,56 \text{ kg.}$$

Al inicio pesa 75 kg, por lo que sí tiene sobrepeso. Como P decrece, dejará de tenerlo al alcanzar el peso límite:

$$75 - \frac{15t}{t+120} = 70,56 \implies \frac{111}{25}(t+120) = 15t \implies 111t + 13320 = 375t \implies t = \frac{555}{11} \approx 50,45.$$

La condición de sobrepeso es estricta, así que al cumplirse ese tiempo el índice ya no supera 25.

$$\text{Deja de tener sobrepeso tras } \frac{555}{11} \approx 50,45 \text{ días (al completar 51 días).}$$

Ejercicio 3

Apartado A · Probabilidades de dos sucesos

Sean A y B los sucesos del enunciado. Se conocen

$$P(A \cup B) = 0,82, \quad P(A \cap B) = 0,38, \quad P(A^c) = 0,35,$$

de donde $P(A) = 1 - 0,35 = 0,65$. Por la fórmula de la unión,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

y, por tanto, $P(B) = 0,82 - 0,65 + 0,38 = 0,55$.

a) La probabilidad condicionada se calcula como $P(B | A^c) = P(B \cap A^c)/P(A^c)$. Como B se descompone en los casos incompatibles $A \cap B$ y $A^c \cap B$,

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0,55 - 0,38 = 0,17, \quad P(B | A^c) = \frac{0,17}{0,35} = \frac{17}{35}.$$

b) Que ocurra exactamente uno de los sucesos significa que ocurra $A \cup B$, pero no ambos:

$$P(\text{solo uno}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,82 - 0,38 = 0,44.$$

c) Sea X el número de veces que ocurre A en diez ensayos independientes. Como $P(A) = 0,65$, se modeliza con una distribución binomial: Entonces $X \sim \text{Binomial}(10, 0,65)$. «Al menos dos» significa $X \geq 2$; restamos los casos $X = 0$ y $X = 1$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - (0,35)^{10} - \binom{10}{1}(0,65)(0,35)^9 \\ &\approx 0,99946. \end{aligned}$$

$$P(B | A^c) = \frac{17}{35}; \quad P(\text{solo uno}) = 0,44; \quad P(X \geq 2) \approx 0,99946.$$

Apartado B · Distribución normal

Se tiene $X \sim N(16, 4)$, por lo que la media es $\mu = 16$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{4} = 2$. Para calcular probabilidades tipificamos mediante $Z = (X - \mu)/\sigma$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

a) Los extremos 14,5 y 16,2 se transforman en

$$z_1 = \frac{14,5 - 16}{2} = -0,75, \quad z_2 = \frac{16,2 - 16}{2} = 0,1.$$

Por tanto,

$$P(14,5 \leq X \leq 16,2) = \Phi(0,1) - \Phi(-0,75) \approx 0,5398 - 0,2266 = 0,3132.$$

b) La condición $P(X \geq a) = 0,25$ sitúa a en el percentil 75. En la normal tipificada, $z_{0,75} \approx 0,6745$; así,

$$a = \mu + \sigma z_{0,75} = 16 + 2(0,6745) \approx 17,35.$$

c) Para muestras de tamaño $n = 64$, la media muestral sigue una normal de media μ y desviación típica $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$:

$$\bar{X} \sim N\left(16, \left(\frac{2}{\sqrt{64}}\right)^2\right) = N(16, 0,25^2).$$

La probabilidad solicitada es

$$P(\bar{X} > 16,3) = P\left(Z > \frac{16,3 - 16}{0,25}\right) = P(Z > 1,2) \approx 1 - 0,8849 = 0,1151.$$

$$P(14,5 \leq X \leq 16,2) \approx 0,3132; \quad a \approx 17,35; \quad P(\bar{X} > 16,3) \approx 0,1151.$$

Ejercicio 4 · Muestreo e intervalo de confianza

a) Afijación proporcional. En un muestreo estratificado proporcional, el tamaño de cada muestra es

$$n_h = n \frac{N_h}{N},$$

donde $n = 500$ es el tamaño total de la muestra, N_h el número de estudiantes del tipo de centro y $N = 20000$ la población. Así,

$$n_{\text{público}} = 500 \frac{12000}{20000} = 300, \quad n_{\text{concertado}} = 500 \frac{6000}{20000} = 150, \\ n_{\text{privado}} = 500 \frac{2000}{20000} = 50.$$

$$300 \text{ de centros públicos, } 150 \text{ concertados, } 50 \text{ privados.}$$

b.i) Intervalo al 99%. La proporción muestral de suspensos es $\hat{p} = 200/500 = 0,4$, y $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6$. Para una proporción, el intervalo de confianza aproximado es

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

Con confianza del 99%, $z_{\alpha/2} = 2,576$; por tanto,

$$0,4 \pm 2,576 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{500}} = 0,4 \pm 0,0564.$$

El intervalo es $[0,3436, 0,4564]$, es decir, entre el 34,36% y el 45,64%. El 43% pertenece al intervalo, de modo que con estos datos no puede afirmarse, al 99% de confianza, que la proporción sea distinta del 43%.

$$IC_{99\%}(p) \approx [0,3436, 0,4564]; \quad \text{el 43\% es compatible con la muestra.}$$

b.ii) Tamaño mínimo para un error inferior al 4%. Manteniendo el nivel de confianza y la proporción muestral, el error máximo cumple

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

Exigimos $E < 0,04$ y despejamos n :

$$n > \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{0,04^2} = \frac{2,576^2 \cdot 0,4 \cdot 0,6}{0,04^2} \approx 995,37.$$

Como el tamaño debe ser entero y el error ha de ser estrictamente menor que 4%, se redondea hacia arriba.

$$n_{\min} = 996 \text{ estudiantes.}$$