

MADRID · PAU 2024 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas II

8 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Después de leer atentamente el examen, responderá razonadamente cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A puntos

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix},$$
 dependiente del parámetro λ . Se pide:

a) puntos

Discutir el sistema en función de los valores de λ .

b) puntos

Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A puntos

Se pide:

a) puntos

Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

b) puntos

Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 1)$.

c) puntos

Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A puntos

Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

a) puntos

Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) puntos

El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta de ecuación $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Ejercicio 4

OPCIÓN A puntos

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = A_1 \cup A_2$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,8). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0,3$ y $P(C/A_3) = 0,6$. Con estos datos se pide:

a) puntos

Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0,25$.

b) puntos

Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

Ejercicio 5

OPCIÓN B puntos

Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $\det(A + B) = \det A + \det B$ no es cierta, en general.

a) puntos

Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces $\det[(A + B)^2] = \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \cdot \det(AB)$.

b) puntos

Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que sí se cumple la igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$.

c) puntos

Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Ejercicio 6

OPCIÓN B puntos

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) puntos

Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) puntos

Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$.

Ejercicio 7

OPCIÓN B puntos

Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) puntos

Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) puntos

Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

Ejercicio 8

OPCIÓN B puntos

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

a) puntos

Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) puntos

Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Tu Profe al Rescate