

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Septiembre de 2005 · Convocatoria extraordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Inversiones financieras

Sean A , B y C los euros invertidos en cada producto; el plazo fijo es el resto, de modo que $A + B + C = 10000$. Las ganancias de los hermanos proporcionan las otras dos ecuaciones:

$$0,06A + 0,05B + 0,02C = 415, \quad 0,04A + 0,03B + 0,07C = 460.$$

Sustituimos $C = 10000 - A - B$. Tras simplificar:

$$4A + 3B = 21500, \quad 3A + 4B = 24000.$$

Multiplicando la primera igualdad por 4 y la segunda por 3, y restándolas, obtenemos $7A = 14000$, luego $A = 2000$. Al sustituir, $B = 4500$ y $C = 3500$. Estas cantidades suman 10000 € y reproducen las ganancias indicadas.

$$A = 2000 \text{ €}, \quad B = 4500 \text{ €}, \quad C = 3500 \text{ €}.$$

Problema 2 · Región factible y extremos

Las restricciones son $x + y \geq -1$, $x \leq 2$, $y \geq -1$ y $x \geq 3y - \frac{1}{2}$. La última equivale a $y \leq \frac{x+1/2}{3}$. Intersectamos las rectas frontera para obtener los vértices factibles: $(0, -1)$, $(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{8})$, $(2, \frac{5}{6})$ y $(2, -1)$. Por ejemplo, el segundo se obtiene de $x + y = -1$ y $x = 3y - \frac{1}{2}$; la esquina superior derecha está en $x = 2$ y $x = 3y - \frac{1}{2}$.

(x, y)	$(0, -1)$	$(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{8})$	$(2, \frac{5}{6})$	$(2, -1)$
$f = 2x + 3y$	-3	$-\frac{17}{8}$	$\frac{13}{2}$	1

$$f_{\min} = -3 \text{ en } (0, -1), \quad f_{\max} = \frac{13}{2} \text{ en } (2, \frac{5}{6}).$$

Problema 3 · Momento óptimo de venta

Si esperamos t días, quedan $2000 - 50t$ kg y el precio por kilo pasa a ser $3 + 0,1t$ €. El tiempo debe cumplir $0 \leq t \leq 40$. Los ingresos son

$$I(t) = (2000 - 50t)(3 + 0,1t) = 6000 + 50t - 5t^2.$$

Buscamos el punto crítico y comprobamos el cambio de crecimiento a decrecimiento:

$$I'(t) = 50 - 10t = 0 \implies t = 5; \quad I'(t) > 0 \text{ si } t < 5, \quad I'(t) < 0 \text{ si } t > 5.$$

Así, los ingresos alcanzan un máximo a los cinco días. Se venderán $2000 - 50(5) = 1750$ kg a $3 + 0,1(5) = 3,50$ €/kg, por un ingreso de $1750 \cdot 3,50 = 6125$ €.

Vender a los 5 días: 1750 kg a 3,50 €/kg; ingreso máximo: 6125 €.

Problema 4 · Independencia de sucesos

Sean M y E los sucesos «estudiar Matemáticas» y «estudiar Economía». Para que sean independientes debe cumplirse $P(M \cap E) = P(M)P(E)$. Sin embargo,

$$P(M)P(E) = 0,15 \cdot 0,30 = 0,045 \neq 0,10 = P(M \cap E),$$

por lo que no son independientes. La probabilidad de estudiar al menos una de las dos asignaturas es

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0,15 + 0,30 - 0,10 = 0,35.$$

El suceso «no estudiar ninguna» es el complementario, así que su probabilidad es $1 - 0,35 = 0,65$.

No son independientes; $P(\text{ni Matemáticas ni Economía}) = 0,65$.

Ejercicio B

Problema 1 · Ecuación matricial

La ecuación $AXB = C$ se despeja como $X = A^{-1}CB^{-1}$. Las matrices A y B tienen determinante no nulo, y sus inversas son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos primero CB^{-1} y después multiplicamos por A^{-1} :

$$CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Inversión en investigación

Sean x e y los millones de euros invertidos en antiinflamatorios y ansiolíticos. El beneficio, en millones de euros, es $B = 0,25x + 0,10y$. Las condiciones se expresan como

$$x + y \leq 3, \quad y \geq 1,5, \quad x \leq 1, \quad y \geq 2x, \quad x, y \geq 0.$$

La región factible tiene vértices $(0, 1,5)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ y $(0,75, 1,5)$. Evaluamos el beneficio en ellos:

(x, y)	$(0, 1,5)$	$(0, 3)$	$(1, 2)$	$(0,75, 1,5)$
B (millones de €)	0,15	0,30	0,45	0,3375

Invertir 1 millón en antiinflamatorios y 2 millones en ansiolíticos; beneficio máximo: 450000 €.

Problema 3 · Área entre la parábola y el eje

La parábola $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ toca el eje de abscisas en $x = -1$. La función es no negativa, pero para plantear el área conviene separar los intervalos delimitados por $x = -2$, $x = -1$ y $x = 5$:

$$A = \int_{-2}^{-1} (x + 1)^2 dx + \int_{-1}^5 (x + 1)^2 dx.$$

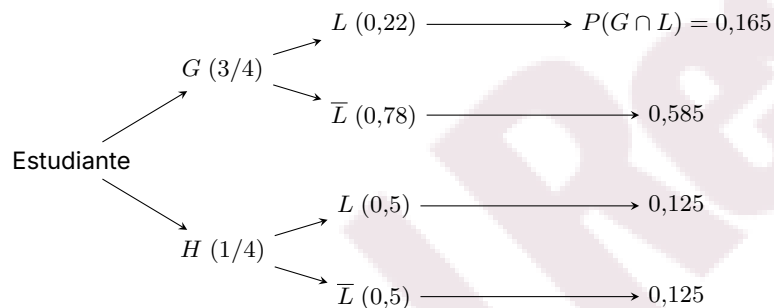
Una primitiva es $(x + 1)^3/3$. Evaluando cada parte,

$$A = \left[\frac{(x + 1)^3}{3} \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{(x + 1)^3}{3} \right]_{-1}^5 = \frac{1}{3} + 72 = \frac{217}{3}.$$

$$A = \frac{217}{3} \text{ unidades}^2.$$

Problema 4 · Probabilidad de llevar gafas

Sean G el suceso «ser chica», H «ser chico» y L «llevar gafas». Al haber tres chicas por cada chico, $P(G) = \frac{3}{4}$ y $P(H) = \frac{1}{4}$. Además, $P(L | G) = 0,22$ y $P(L | H) = 0,5$. En el árbol se multiplican las probabilidades de cada camino; sumamos las rutas incompatibles que terminan en gafas:



La probabilidad total de llevar gafas se obtiene sumando los dos caminos que terminan en L :

$$P(L) = P(G)P(L | G) + P(H)P(L | H) = \frac{3}{4}(0,22) + \frac{1}{4}(0,5) = 0,29.$$

Así,

$$P(\bar{L}) = 1 - 0,29 = 0,71, \quad P(G \cap L) = \frac{3}{4}(0,22) = 0,165.$$

Para invertir la condición empleamos Bayes:

$$P(G | L) = \frac{P(G \cap L)}{P(L)} = \frac{0,165}{0,29} = \frac{33}{58}.$$

$$P(\text{no llevar gafas}) = 0,71, \quad P(G \cap L) = 0,165, \quad P(G | L) = \frac{33}{58}.$$