



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Calcula a y b . **(1 punto)**
- b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de

las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**
- b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto (2, 6).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN**

**ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
 b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

- a) ¿Para que valores de m tiene inversa la matriz A ? **(1 punto)**
 b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

- a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**
 b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\vec{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

- a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**
 b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b . (1 punto)

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1,5 puntos)

a) Continua en $x = -1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \\ f(-1) &= -a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + b = -1$$

Continua en $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \\ f(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

Junto las dos ecuaciones y resuelvo el sistema:

$$\left. \begin{aligned} -a + b &= -1 \\ a + b &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -a + b &= -1 \\ b &= \frac{1}{2} - a \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + \frac{1}{2} - a = -1 \Rightarrow -2a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

b)

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene. Pues su dominio es $\mathbb{R}$.

$x = 0$ y $x = -1$ anulan los denominadores, pero las funciones no están definidas en dichos valores.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Una asíntota horizontal en $-\infty$ es $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

En $-\infty$ no hay pues existe horizontal.

Hacemos el estudio en $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

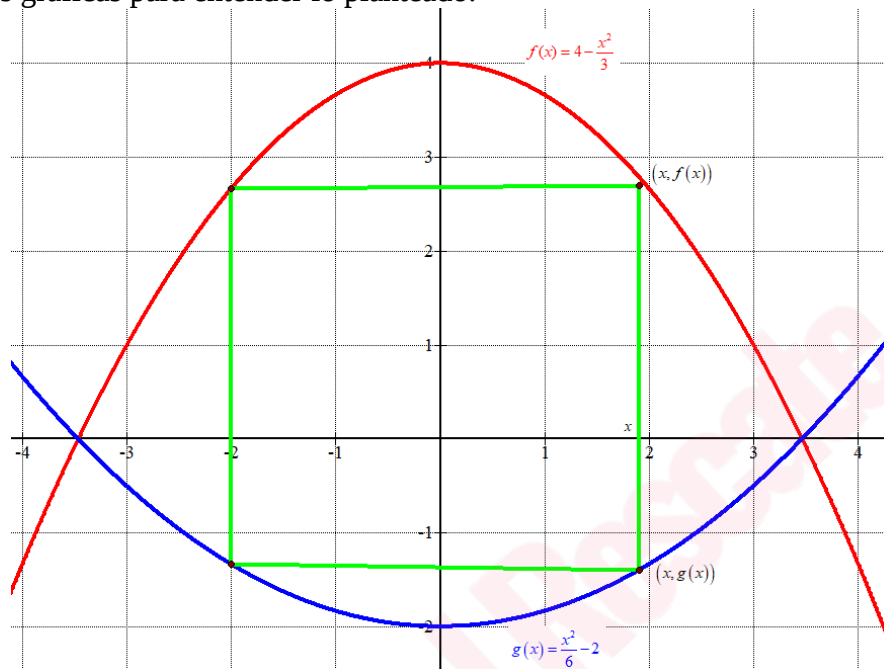
En $+\infty$ la asíntota oblicua tiene ecuación $y = x - 1$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de

las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

Dibujamos las gráficas para entender lo planteado.



Averiguamos donde se cortan las gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2 \Rightarrow 24 - 2x^2 = x^2 - 12 \Rightarrow -3x^2 = -36 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Por la simetría de las funciones podemos decir que la base del rectángulo es variable dependiendo de la coordenada x del punto de la gráfica elegido ($2x$) estando x comprendida entre 0 y $\sqrt{12}$.

Y la altura del rectángulo es la suma de los valores absolutos de las funciones o simplemente el valor positivo ($f(x)$) menos el valor negativo ($g(x)$).

$$\text{Altura} = f(x) - g(x) = 4 - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x^2}{6} - 2 \right) = 4 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6} + 2 = 6 - \frac{3x^2}{6} = 6 - \frac{x^2}{2}$$

Y como el área del rectángulo es el producto de la base por la altura:

$$A(x) = 2x \left(6 - \frac{x^2}{2} \right) = 12x - x^3$$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de un máximo.

$$A(x) = 12x - x^3 \Rightarrow A'(x) = 12 - 3x^2$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = \frac{-12}{-3} = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Como } A''(x) = -6x \Rightarrow A''(2) = -12 < 0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$.

Las dimensiones del rectángulo son $2 \cdot 2 = 4$ de base y altura $6 - \frac{2^2}{2} = 6 - 2 = 4$. Es un cuadrado de lado 4.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**
 b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

a) Igualamos a cero la función.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 & (\text{si } x < 0) \\ (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 & (\text{si } x \geq 0) \end{cases}$$

La gráfica corta el eje de abscisas en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

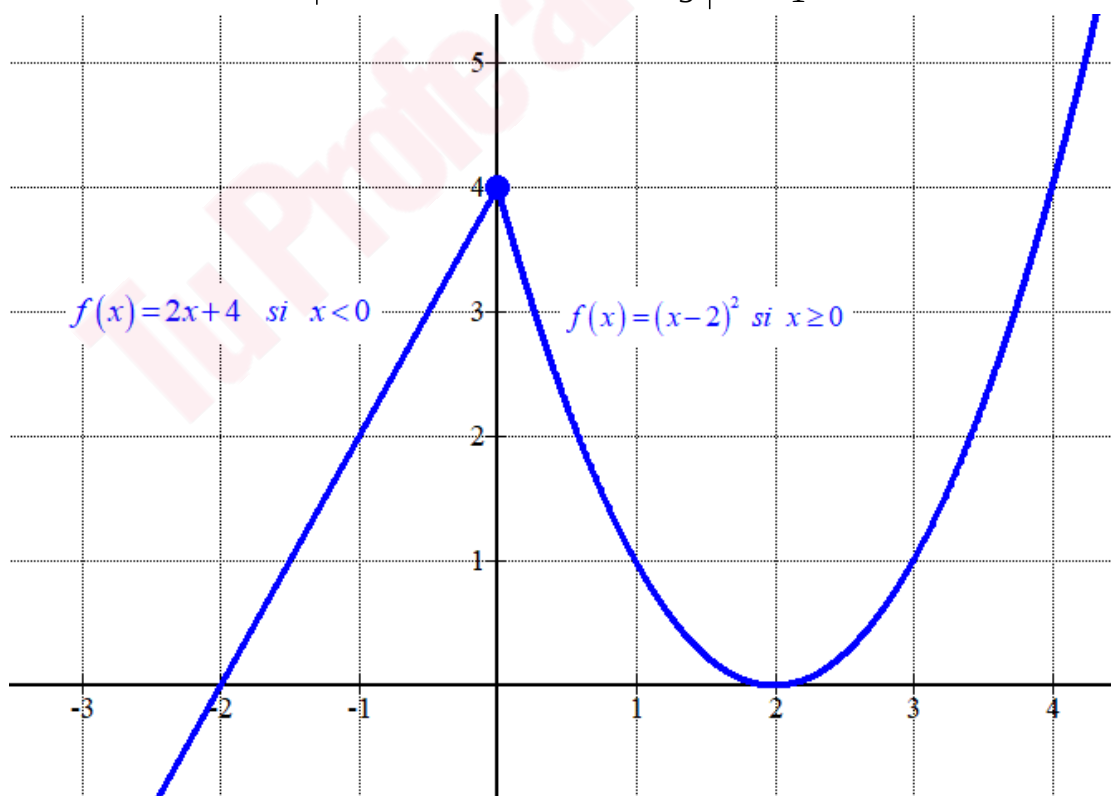
La gráfica es un trozo de recta y un trozo de parábola. Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

$$f(x) = 2x+4 \quad \text{si } x < 0$$

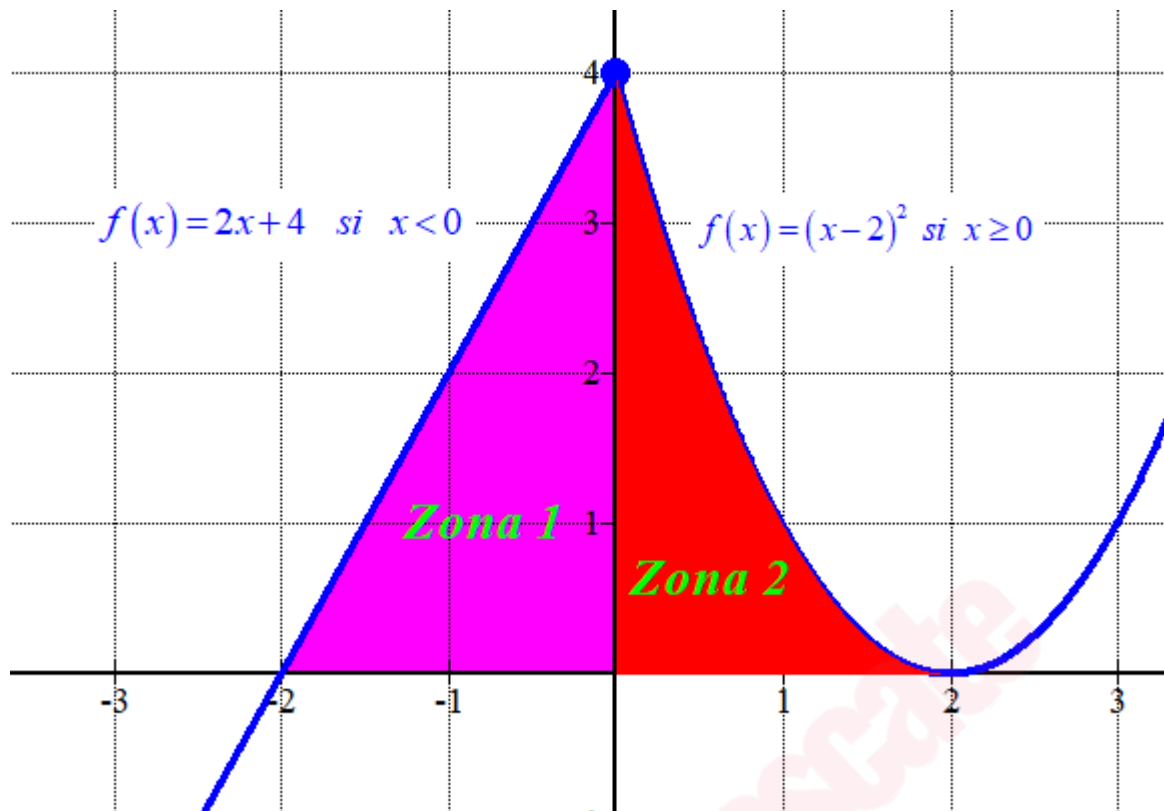
x	$y = 2x+4$
-3	-2
-2	0
-1	2
0	4 No incluido

$$f(x) = (x-2)^2 \quad \text{si } x \geq 0$$

x	$y = (x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1



b) Nos piden hallar el área del recinto coloreado de rosa y rojo.



Contando cuadraditos el área está entre 6 y 7 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto con el cálculo integral.

$$\text{Área 1} = \int_{-2}^0 2x + 4 dx = \left[x^2 + 4x \right]_{-2}^0 = \left[0^2 + 4 \cdot 0 \right] - \left[(-2)^2 + 4(-2) \right] = 0 - (4 - 8) = 4u^2$$

$$\text{Área 2} = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{(2 - 2)^3}{3} - \frac{(0 - 2)^3}{3} = 0 - \frac{-8}{3} = \frac{8}{3}u^2$$

$$\boxed{\text{Área total} = \text{Área 1} + \text{Área 2} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \approx 6.66u^2}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2, 6)$.

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{\begin{array}{ccc} x^3 & & x^2 - 2x + 1 \\ -x^3 & +2x^2 & -x \\ & +2x^2 & -x \\ & -2x^2 & +4x & -2 \\ & & 3x & -2 \end{array}}{x+2} = \int x+2 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx =$$

$$= \int x+2 dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1 \quad \text{raiz doble} \\ \frac{3x-2}{x^2-2x+1} &= \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x-2 &= Ax - A + B \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ -2 = -A+B \end{cases} \Rightarrow -2 = -3+B \Rightarrow B=1 \\ \int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx &= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 3\ln|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx = \\ &= 3\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + K$$

La primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + K$

Como pasa por el punto $(2, 6)$ debe cumplirse $F(2) = 6$.

$$F(2) = 6 = \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 + 3\ln|2-1| - \frac{1}{2-1} + K \Rightarrow 2 + 4 + 0 - 1 + K = 6 \Rightarrow \boxed{K=1}$$

La primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(2, 6)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + 1$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**

b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$ y la ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 3m + 1 + 4m^2 - 3m - m^2 - 4 = 3m^2 - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3m^2 = 3 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{1} = \pm 1}$$

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -4 \quad 1 \quad -6 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad 0 \quad -6 \\ 0 \quad 6 \quad 0 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $m = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -4 \quad -1 \quad -6 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -12 \quad 0 \quad -12 \\ 0 \quad 12 \quad 0 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- b) Para $m = 2$ el sistema es compatible determinado. Utilizamos el método de Gauss para encontrar su solución.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -2x \quad +3y \quad -z \quad = 1 \\ 2x \quad -2y \quad +4z \quad = -6 \\ \hline 0 \quad y \quad +3z \quad = -5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad -4y \quad +2z \quad = -6 \\ -x \quad +y \quad -2z \quad = 3 \\ \hline 0 \quad -3y \quad \quad = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -3 \\ y + 3z = -5 \\ -3y = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -3 \\ y + 3z = -5 \\ \boxed{y = 1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 + 2z = -3 \\ 1 + 3z = -5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = -2 \\ 3z = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = -2 \\ \boxed{z = -2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2(-2) = -2 \Rightarrow x - 4 = -2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

La solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = -2$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**

b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{m}\sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común } \sqrt{m} \\ \text{en columna 1ª} \end{array} \right\} = \sqrt{m} \begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común } \sqrt{m} \\ \text{en fila 1ª} \end{array} \right\} = \sqrt{m}\sqrt{m} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \\
 &= m(m^2 + 1 + 1 - m - m - 1) = m(m^2 - 2m + 1) \\
 |A| = 0 &\Rightarrow m(m^2 - 2m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La inversa de la matriz A existe para cualquier valor de m distinto de 0 y 1.

b) Para $m = 4$ existe la inversa de A.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX = 12I \Rightarrow X = 12A^{-1}I = 12A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 64 + 4 + 4 - 16 - 16 - 4 = 36$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}}{36} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver la ecuación matricial.

$$X = 12A^{-1} = 12 \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

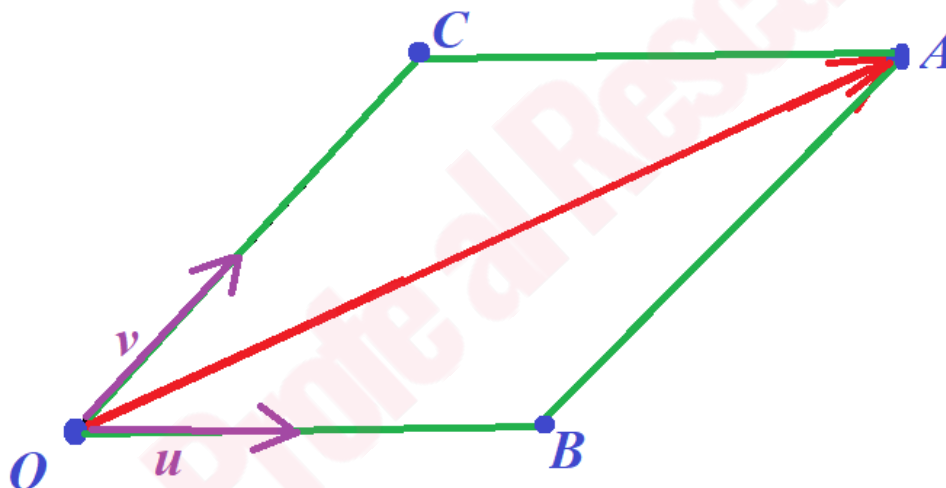
b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

a) Para que $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$ el producto escalar debe ser cero.

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1, a, b)(2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow \vec{w} = (1, a, 2)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1, a, 2)(-1, 2, 3) = 0 \Rightarrow -1 + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-5}{2} = -2.5}$$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Tenemos que hallar los puntos B y C tales que se forme un paralelogramo.

Como los puntos B y C están en la dirección de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u} = (-1, 2, 3) \Rightarrow B = a(-1, 2, 3) = (-a, 2a, 3a)$$

$$\vec{v} = (2, 0, -1) \Rightarrow C = b(2, 0, -1) = (2b, 0, -b)$$

Como es un paralelogramo $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow (2b, 0, -b) = (-4, 4, 7) - (-a, 2a, 3a) = (-4 + a, 4 - 2a, 7 - 3a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + a \\ 0 = 4 - 2a \\ -b = 7 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + a \\ 2a = 4 \\ -b = 7 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + a \\ \boxed{a = 2} \\ -b = 7 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + 2 \\ -b = 7 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -2 \\ -b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-2}{2} = -1 \\ \boxed{b = -1} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow (-a, 2a, 3a) = (-4, 4, 7) - (2b, 0, -b) \text{ Igual que el anterior.}$$

Sustituyendo en las coordenadas de los vértices:

$$B = (-a, 2a, 3a) = (-2, 4, 6)$$

$$C = (2b, 0, -b) = (-2, 0, 1)$$

Los cuatro vértices del paralelogramo son $O(0, 0, 0)$; $A(-4, 4, 7)$; $B(-2, 4, 6)$ y $C(-2, 0, 1)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$.

- a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**
 b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

a)

$$r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(2, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P(1, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (1+a, -a, 3a) \end{cases}$$

Para que las rectas se corten deben pertenecer al mismo plano. Para ello el producto mixto de los vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{Q_r P}$ debe ser nulo.

$$\overrightarrow{Q_r P} = (1, 2, 3) - (2, 0, 1) = (-1, 2, 2)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{Q_r P}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 3a + 4 + 4a - 2a + 2 + 2a - 6a = -a + 6$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{Q_r P}] = 0 \Rightarrow -a + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Comprobamos que para $a = 6$ también se cumple que los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y por tanto las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ a = 6 \rightarrow \vec{v}_s = (7, -6, 18) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{7} \neq \frac{-1}{-6} = \frac{2}{18}$$

- b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores debe ser nulo. Pueden estar en distinto plano pero sus direcciones son perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s = (1+a, -a, 3a) \\ \vec{u}_r \perp \vec{v}_s \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, -1, 2)(1+a, -a, 3a) = 0 \Rightarrow 1+a+a+6a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+8a = 0 \Rightarrow 8a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{8}}$$