

Resolución de los siete ejercicios, con desarrollo de los apartados obligatorios y optativos.

Ejercicio 1

La función es polinómica-exponencial y su dominio es $\mathbb{R}$. Derivando,

$$f'(x) = xe^x, \quad f''(x) = (x+1)e^x.$$

La segunda derivada cambia de signo en $x = -1$, por lo que el punto de inflexión es $(-1, -2/e)$. La pendiente de la tangente es $f'(-1) = -1/e$ y la de la normal es su opuesta recíproca, e . Así,

tangente: $y + \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x+1)$,	normal: $y + \frac{2}{e} = e(x+1)$.
---	--------------------------------------

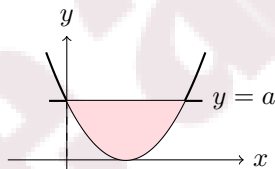
No hay asíntotas verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Cuando $x \rightarrow -\infty$, $(x-1)e^x \rightarrow 0$, de modo que $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda. Para $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ crece exponencialmente; además $f(x)/x \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntota horizontal ni oblicua por la derecha.

Ejercicio 2

Los puntos de corte satisfacen $(x-1)^2 = a$, luego $x = 1 \pm \sqrt{a}$. Entre ambos cortes, la recta $y = a$ está por encima de la parábola. Por simetría respecto de $x = 1$, el área es

$$A = \int_{1-\sqrt{a}}^{1+\sqrt{a}} (a - (x-1)^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - u^2) du = \frac{4}{3} a^{3/2}.$$

La figura muestra la región comprendida entre ambas gráficas.



Al imponer $A = 4/3$, resulta $a^{3/2} = 1$. Como $a > 0$, $\boxed{a = 1}$.

Ejercicio 3

Integramos por tramos, pues la definición cambia en $x = 0$:

$$\int_{-\pi/4}^1 f(x) dx = \int_{-\pi/4}^0 x \sin(2x) dx + \int_0^1 (\cos(\pi x) - 1) dx.$$

En el primer tramo usamos integración por partes:

$$\int x \sin(2x) dx = -\frac{x \cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4},$$

que evaluada entre $-\pi/4$ y 0 vale $1/4$. El segundo tramo vale $[\sin(\pi x)/\pi - x]_0^1 = -1$. Por tanto,

$$\boxed{\int_{-\pi/4}^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}}.$$

Ejercicio 4

Para el área del triángulo usamos la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4), \quad \overrightarrow{AC} = (-5, -1, 0),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 20, 22), \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 20^2 + 22^2} = 15.$$

Sea $D = (0, 0, t)$. El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |(-4, 20, 22) \cdot (D - A)| = \frac{|2(11t + 5)|}{6}.$$

Al exigir $V = 20$, obtenemos $|11t + 5| = 60$, luego

$$D = (0, 0, 5) \quad \text{o} \quad D = (0, 0, -65/11).$$

Ejercicio 5

El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, 1, 2)$ y $\|\vec{n}\|^2 = 9$. Para reflejar $P = (1, 0, 1)$ respecto del plano, usamos

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n} \cdot P + 5}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Como $\vec{n} \cdot P + 5 = 9$, se obtiene $P' = (-3, -2, -3)$.

Un plano paralelo tiene la misma normal, así que es $2x + y + 2z + D = 0$. La distancia entre él y $2x + y + 2z + 5 = 0$ es $|D - 5|/3$. Al imponer que sea 2, resulta $D = 11$ o $D = -1$. Los planos son

$$2x + y + 2z + 11 = 0, \quad 2x + y + 2z - 1 = 0.$$

Ejercicio 6

El determinante de A es

$$\det A = \alpha(\alpha - 4)(\alpha + 2).$$

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante no se anula, así que A admite inversa si $\alpha \notin \{-2, 0, 4\}$.

Para $\alpha = 1$ calculamos la inversa, por ejemplo mediante adjunta y determinante. Como $\det A = -9$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7

Tipificamos los diámetros con $Z = (X - \mu)/\sigma$.

a) En condiciones ideales, $X \sim N(13, 0.1)$. Por tanto,

$$P(12.9 < X < 13.15) = P(-1 < Z < 1.5) = 0.9332 - 0.1587 = 0.7745.$$

La probabilidad es 77.45% .

b) El 15 de julio, $X \sim N(12.9, 0.2)$. Entonces

$$P(12.9 < X < 13.15) = P(0 < Z < 1.25) = 0.8944 - 0.5000 = 0.3944.$$

La probabilidad es 39.44% .