

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2012

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Continuidad, derivada y extremos

La función viene definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A, & x \leq 3, \\ -4 + 10x - x^2, & x > 3. \end{cases}$$

a) Continuidad y derivabilidad. El único punto que debemos comprobar es $x = 3$, donde cambia la expresión. Para que haya continuidad, el valor del primer trozo y el límite del segundo deben coincidir:

$$f(3) = 9 + A, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -4 + 30 - 9 = 17.$$

La igualdad $9 + A = 17$ da $A = 8$. Con este valor, las derivadas laterales son 3 por la izquierda y $10 - 2(3) = 4$ por la derecha; como no coinciden, la función no es derivable en $x = 3$. **Conclusión.** La función es continua para $A = 8$, pero no es derivable en $x = 3$.

b) Puntos donde $f'(x) = 0$. Derivamos cada expresión en el intervalo en que corresponde:

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & x < 3, \\ 10 - 2x, & x > 3. \end{cases}$$

El primer trozo no se anula. En el segundo, $10 - 2x = 0$ da $x = 5$, que pertenece a $x > 3$. **Conclusión.** $f'(x) = 0$ únicamente en $x = 5$.

c) Extremos absolutos en $[4, 8]$. En este intervalo se aplica la expresión cuadrática. Los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado pueden alcanzarse en los extremos del intervalo o en puntos críticos interiores. Como $f'(x) = 10 - 2x$, el único punto crítico interior es $x = 5$. Evaluamos:

$$f(4) = 20, \quad f(5) = 21, \quad f(8) = 12.$$

Conclusión. El máximo absoluto es 21 en $x = 5$ y el mínimo absoluto es 12 en $x = 8$.

Opción A - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 4 & 6 \\ 1 & a+1 & 1 & 3 \\ a-1 & -a & -3 & -3 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante:

$$\det A = -(a+1)(3a+5).$$

Si $a \neq -1, -\frac{5}{3}$, el determinante no se anula, de modo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$; por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $a = -\frac{5}{3}$, el rango de A es 2: el determinante se anula y, por ejemplo, el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale $-\frac{1}{3}$, así que $\text{rg}(A) = 2$. La reducción de la ampliada es

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y muestra que $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$; el sistema es incompatible.

Para $a = -1$, el menor anterior vale 1, así que $\text{rg}(A) = 2$. La reducción de la ampliada es

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$. Como ambos rangos coinciden y son menores que las tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. **Conclusión.** Es SCD si $a \neq -1, -\frac{5}{3}$, SI si $a = -\frac{5}{3}$ y SCI si $a = -1$.

b) Resolución para $a = -1$. El sistema queda

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x = 3, \\ -2x + y - 3z = -3. \end{cases}$$

Tomamos $z = t$. La segunda ecuación da $x = 3$ y la primera, $y = 3 + 4t$. La tercera queda satisfecha con esos valores:

$$-2(3) + (3 + 4t) - 3t = -3.$$

Conclusión. Para $a = -1$, $(x, y, z) = (3, 3 + 4t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 3. Puntos a distancia fijada de un plano

La recta, en forma paramétrica, es

$$r : (x, y, z) = (4, 1, 2) + t(2, -1, 3).$$

Un punto genérico de la recta es $X(t) = (4 + 2t, 1 - t, 2 + 3t)$. La distancia de (x, y, z) al plano $2x + y - 2z - 7 = 0$ es

$$d(X, \pi) = \frac{|2x + y - 2z - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}.$$

Sustituyendo $X(t)$, el numerador dentro del valor absoluto es $-2 - 3t$ y el denominador es 3. Imponemos la distancia pedida, igual a 1:

$$\frac{|-2 - 3t|}{3} = 1 \iff -2 - 3t = 3 \text{ o } -2 - 3t = -3.$$

Así, $t = \frac{1}{3}$ o $t = -\frac{5}{3}$. Al sustituir en la recta se obtienen

$$X\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3\right), \quad X\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3\right).$$

Conclusión. Los puntos buscados son $\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3\right)$.

Opción A - Ejercicio 4. Plano paralelo a dos rectas

El vector director de r es $\vec{u} = (1, 1, -1)$, tras simplificar $(2, 2, -2)$. Para parametrizar s , tomamos $x = t$ en sus ecuaciones: $y = 4 - t$ y $z = 4 - 2t$. Por tanto, un vector director de s es $\vec{v} = (1, -1, -2)$.

El plano paralelo a ambas rectas contiene las dos direcciones, así que un vector normal se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3, 1, -2).$$

Usamos el punto $A = (2, 3, 4)$ para escribir la ecuación general del plano:

$$-3(x - 2) + (y - 3) - 2(z - 4) = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $-3x + y - 2z + 11 = 0$.

La recta perpendicular a ese plano tiene como dirección su vector normal y debe pasar por $B = (4, -1, 2)$; expresada en forma paramétrica:

$$r_B : (x, y, z) = (4, -1, 2) + t(-3, 1, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Esta es la recta que pasa por B y es perpendicular al plano.

Opción B - Ejercicio 1. Simetrías en el espacio

a) Simetría respecto de un punto. Si Q es el punto medio de PP' , entonces $P' = 2Q - P$. Con $P = (2, 1, -1)$ y $Q = (3, 0, 2)$:

$$P' = (6, 0, 4) - (2, 1, -1) = (4, -1, 5).$$

Conclusión. El simétrico respecto de Q es $P' = (4, -1, 5)$.

b) Simetría respecto de una recta. La recta r pasa por $A = (1, 1, 0)$ y tiene dirección $\vec{u} = (1, 1, 1)$. La proyección H de P sobre r se obtiene con

$$H = A + \frac{(P - A) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}.$$

Como $P - A = (1, 0, -1)$ y $(P - A) \cdot \vec{u} = 0$, el punto P ya está alineado perpendicularmente con r y el pie es $H = A$. El punto simétrico es $P'' = 2H - P$:

$$P'' = (2, 2, 0) - (2, 1, -1) = (0, 1, 1).$$

Conclusión. El simétrico de P respecto de la recta es $P'' = (0, 1, 1)$.

c) Simetría respecto del plano. El plano es $x + y + z - 3 = 0$, con normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$. La proyección ortogonal H de P sobre el plano es

$$H = P - \frac{1+1-1-3}{1^2+1^2+1^2}\vec{n} = P + \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

El simétrico se obtiene haciendo que H sea el punto medio de PP''' :

$$P''' = 2H - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Conclusión. El simétrico de P respecto del plano es $P''' = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Opción B - Ejercicio 2. Ceros, integral y recta normal

La función $f(x) = x^2 \sin x$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

a) Ceros en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. En ese intervalo se tiene $x^2 > 0$ y $\sin x > 0$. Por tanto, el producto $x^2 \sin x$ es estrictamente positivo y no puede valer cero. **Conclusión.** La ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

b) Integral en $[0, \pi]$. Aplicamos integración por partes, tomando $u = x^2$ y $dv = \sin x dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin x dx &= [-x^2 \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x dx \\ &= \pi^2 + [2x \sin x + 2 \cos x]_0^\pi = \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

Conclusión. La integral vale $\pi^2 - 4$.

c) Recta normal en $(\pi, f(\pi))$. Tenemos $f(\pi) = 0$ y

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x, \quad f'(\pi) = -\pi^2.$$

La tangente tiene pendiente $-\pi^2$, así que la normal, perpendicular a ella, tiene pendiente $1/\pi^2$. La ecuación punto-pendiente por $(\pi, 0)$ es

$$y - 0 = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi).$$

Conclusión. La recta normal es $y = \frac{x - \pi}{\pi^2}$.

Opción B - Ejercicio 3. Propiedades de determinantes

Utilizamos que el determinante es lineal en cada columna y cambia de signo al intercambiar dos columnas. Se conocen

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1, \quad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3, \quad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2.$$

a) Sacar el factor 3 de la segunda columna y permutar las dos últimas columnas cambia el signo:

$$\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b}) = 3 \det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{b}) = -3 \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = 3.$$

b) Sacamos el signo negativo de la tercera columna y desarrollamos la primera:

$$\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) = -\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -3 - 2 = -5.$$

c) Sacando el factor 2 de la segunda columna y desarrollando por multilinealidad, los términos con columnas repetidas se anulan:

$$\begin{aligned}\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) &= 2(\det(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) + 3 \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{d})) \\ &= 2(-1 + 3 \cdot 1) = 4.\end{aligned}$$

Aquí $\det(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = -1$ por ser una permutación cíclica de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$, mientras que $\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}) = 1$ por intercambiar las dos primeras columnas. **Conclusión.** Los tres determinantes pedidos valen 3, -5 y 4, respectivamente.

Opción B - Ejercicio 4. Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array} \right).$$

El determinante es $\det A = -(a+4)$. Si $a \neq -4$, el rango de A es 3, igual al de la ampliada; Rouché-Frobenius da un sistema compatible determinado.

Para $a = -4$, la tercera fila de coeficientes es el doble de la primera y sus términos independientes también verifican $4 = 2 \cdot 2$. El menor de las filas primera y segunda y columnas primera y segunda vale -1 , por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado. En este caso, tomando $z = t$, las dos ecuaciones independientes dan $x = 2 + 2t$ e $y = -7t$. **Conclusión.** El sistema es SCD si $a \neq -4$ y SCI si $a = -4$; para $a = -4$, $(x, y, z) = (2 + 2t, -7t, t)$.

b) Resolución para $a = -5$. El sistema queda

$$\begin{cases} x - 2z = 2, \\ -5x - y + z = -8, \\ 2x - 5z = 4. \end{cases}$$

De la primera ecuación, $x = 2 + 2z$. Sustituyendo en la tercera:

$$2(2 + 2z) - 5z = 4 \implies z = 0,$$

y entonces $x = 2$. La segunda ecuación da $-10 - y = -8$, así que $y = -2$. **Conclusión.** Para $a = -5$, la solución única es $(x, y, z) = (2, -2, 0)$.