

Matemàtiques

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.
 - a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.
[1 punto]
 - b) Calcule el área de la región del apartado anterior.
[1 punto]

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Encuentre los valores del parámetro a para los cuales la matriz es invertible.
[1 punto]
- b) Discuta la posición relativa de los planos $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ y $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a .
[1 punto]

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
[1 punto]
- b) Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de ambas matrices tiene que ser cero.
[1 punto]

4. Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]
 - b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.
[1 punto]
5. Sean P , Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX , OY y OZ , respectivamente.
- a) Calcule los puntos P , Q y R , y el perímetro del triángulo de vértices P , Q y R .
[1 punto]
 - b) Calcule el área del triángulo de vértices P , Q y R .
[1 punto]
- NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ puede usar la expresión $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, donde $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
6. Considere la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
- a) Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
[1 punto]
 - b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.
[1 punto]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés