

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Comprobar razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado que:

- a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $AB = BA$, entonces se deduce que $A^2 B^2 = (AB)^2$. (2 puntos).

- b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = O$, siendo I y O ,

respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula, (4 puntos), y que una matriz A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ tiene matriz inversa. (2 puntos).

- c) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = O$. (2 puntos).

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β

parametros reales. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Unas ecuaciones implícitas de r_1 . (2 puntos).
- b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π , (2 puntos) y la ecuación de ese plano π , (2 puntos).
- c) El área del triángulo de vértices P , Q y R , siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2 . (4 puntos).

PROBLEMA A.3. Se dan las funciones $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ y $g(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$. (4 puntos).
- Los dominios de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (3 puntos).
- La expresión simplificada de la función $f(x) + g(x)$, (1'5 puntos), y el recorrido de esta función $f(x) + g(x)$. (1'5 puntos).

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$$
, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. (4 puntos).
- Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 puntos).
- Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado. (3 puntos).

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - 1 = y - 2 = z \end{cases}$. Obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 puntos).
- La distancia entre las rectas r y s , (2 puntos), **justificando** que las rectas r y s se cruzan. (2 puntos).
- Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s . (3 puntos).

PROBLEMA B.3. En el plano XY está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \text{ con } 0 \leq x \leq 40, \text{ siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.}$$

Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A , de manera que los vértices de R sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El área de la parcela A . (3 puntos).
- Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. (5 puntos).
- El valor de dicha área máxima. (2 puntos).