

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- Calcular la matriz A^2 y su inversa (5 puntos)
- Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$ (2 puntos)

*Solución:*a) Cálculo de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de A^2 ,

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 36 - 16 - 6 - 6 = 16 \neq 0 \rightarrow \exists (A^2)^{-1}$$

$$A^2 \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/16 & -1/16 & -10/16 \\ 10/16 & -3/16 & 2/16 \\ 6/16 & -5/16 & -2/16 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X ? / $2A^2X = 4B$ Despejemos X ,

$$A^2X = \frac{4}{2}B; \quad A^2X = 2B$$

Como existe $(A^2)^{-1}$, multiplicando por la izquierda por $(A^2)^{-1}$,

$$(A^2)^{-1}A^2X = (A^2)^{-1}2B; \quad \text{como } (A^2)^{-1}A^2 = I \rightarrow IX = 2(A^2)^{-1}B; \quad X = 2(A^2)^{-1}B$$

Procedamos al cálculo de X ,

$$X = 2 \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-10) \cdot 0 & -2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + (-10) \cdot 0 & -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-10) \cdot 1 \\ 10 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 10 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 10 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6+1 & 4-4 & -2-2-10 \\ 30+3 & -20-12 & 10-6+2 \\ 18+5 & -12-20 & 6-10-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Tu Profecia al Rescate

Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = millones de euros dejados a la hija mayor
 y = millones de euros dejados a la hija mediana
 z = millones de euros dejados a la hija pequeña

Del enunciado del problema obtenemos:

“A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos”, $x = 9 + \frac{y+z}{2} \rightarrow 2x = 18 + y + z \rightarrow 2x - y - z = 18$

“A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos”
 $y = \frac{x+z}{2} \rightarrow 2y = x + z \rightarrow x - 2y + z = 0$

“A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos”
 $z = \frac{35}{100}(x+y) \rightarrow z = \frac{7}{20}(x+y) \rightarrow 20z = 7x + 7y \rightarrow 7x + 7y - 20z = 0$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 18 \\ 7x + 7y - 20z = 0 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 18 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2 \cdot F_1 \\ F_3 - 7 \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 21 & -27 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 7 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -6 & -126 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow -6z = -126 \rightarrow z = \frac{-126}{-6} = 21$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 3y - 3z = 18 \rightarrow 3y - 3 \cdot 21 = 18 \rightarrow 3y = 18 + 63 \rightarrow 3y = 81 \rightarrow y = \frac{81}{3} = 27$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x - 2y + z = 0 \rightarrow x - 2 \cdot 27 + 21 = 0 \rightarrow x - 33 = 0 \rightarrow x = 33$$

Solución: el millonario ha dejado 33 millones de euros a su hija mayor, 27 millones de euros a su hija mediana y 21 millones de euros a su hija menor.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$2(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0 - 5}{2(0^2 - 1)} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \rightarrow \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0; \quad 4x-5=0; \quad 4x=5; \quad x=\frac{5}{4} \rightarrow \left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

Su dominio es $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ y sus puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2x} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

, la asíntota horizontal es $y=0$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles a.v. $x=-1$ y $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4(-1)-5}{2((-1)^2-1)} = \frac{-9}{0} = \infty \rightarrow x=-1 \text{ es a.v.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4 \cdot 1 - 5}{2(1^2 - 1)} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x=1 \text{ es a.v.}$$

La asíntota horizontal es $y=0$ y las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{4 \cdot 2(x^2-1) - (4x-5) \cdot 2 \cdot 2x}{(2(x^2-1))^2} = \frac{8x^2 - 8 - 16x^2 + 20x}{4(x^2-1)^2} = \frac{-8x^2 + 20x - 8}{4(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2 + 5x - 2}{(x^2-1)^2}$$

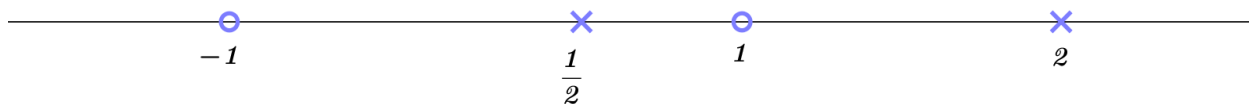
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-5 \pm 3}{-4} =$$

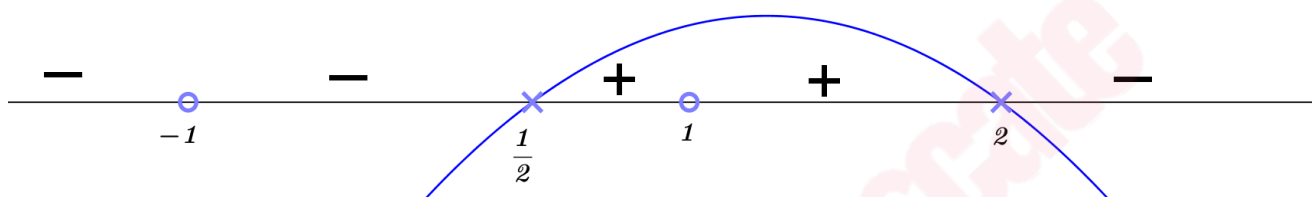
$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

$$(x^2 - 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = -1 \quad y \quad x = 1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $(\{-1, 1\} \notin \text{Dom } f(x))$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $1/2$ y 2 , luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$ y

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en $x = \frac{1}{2}$ hay un mínimo local y en $x = 2$ hay un máximo local.

$$x = \frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} - 5}{2 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right)} = \frac{-3}{2 \left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = \frac{-3}{2 \left(-\frac{3}{4} \right)} = \frac{-3}{-\frac{3}{2}} = 2 \rightarrow \text{Mínimo local } \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$$

$$x = 2 \quad f(2) = \frac{4 \cdot 2 - 5}{2(2^2 - 1)} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Máximo local } \left(2, \frac{1}{2} \right)$$

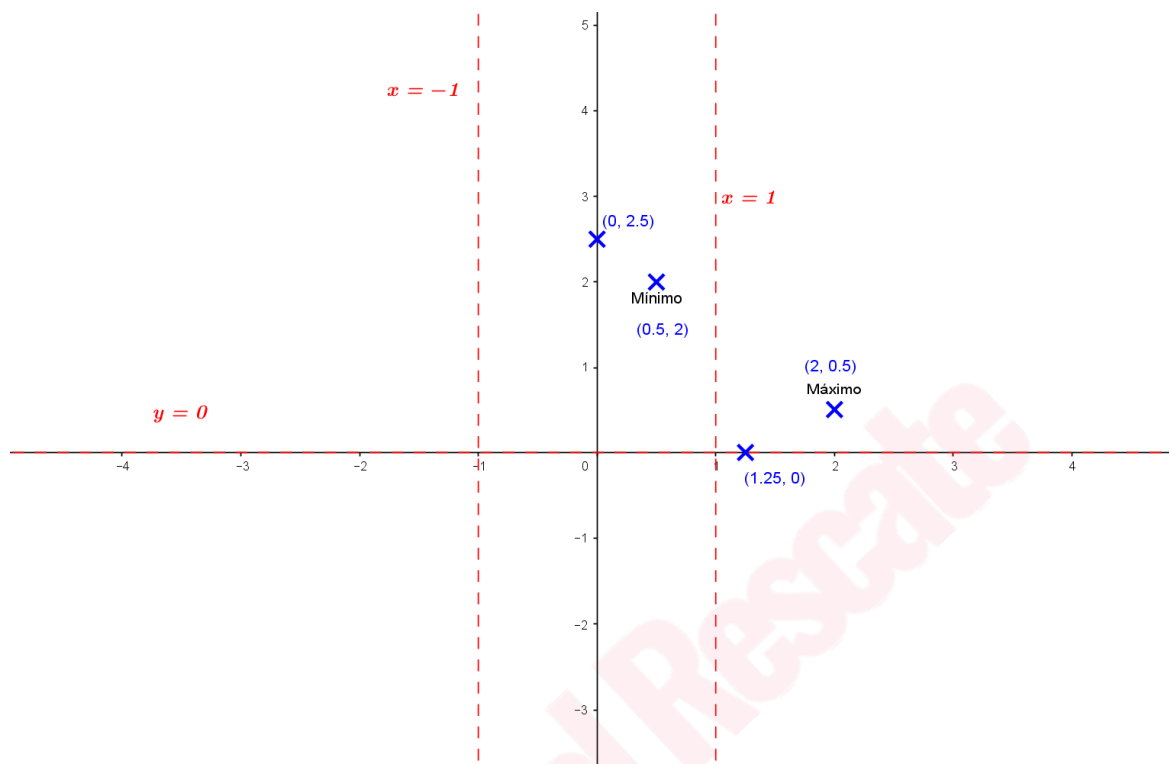
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, mínimo local en $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, máximo local en $\left(2, \frac{1}{2}\right)$;

a.h. $y = 0$, a.v. $x = -1$ y $x = 1$.

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener:
la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal $y = 0$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow y = \frac{4 \cdot (-1000) - 5}{2((-1000)^2 - 1)} = -0.002... < 0$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow y = \frac{4 \cdot 1000 - 5}{2(1000^2 - 1)} = 0.0019... > 0$$

$y = 0$



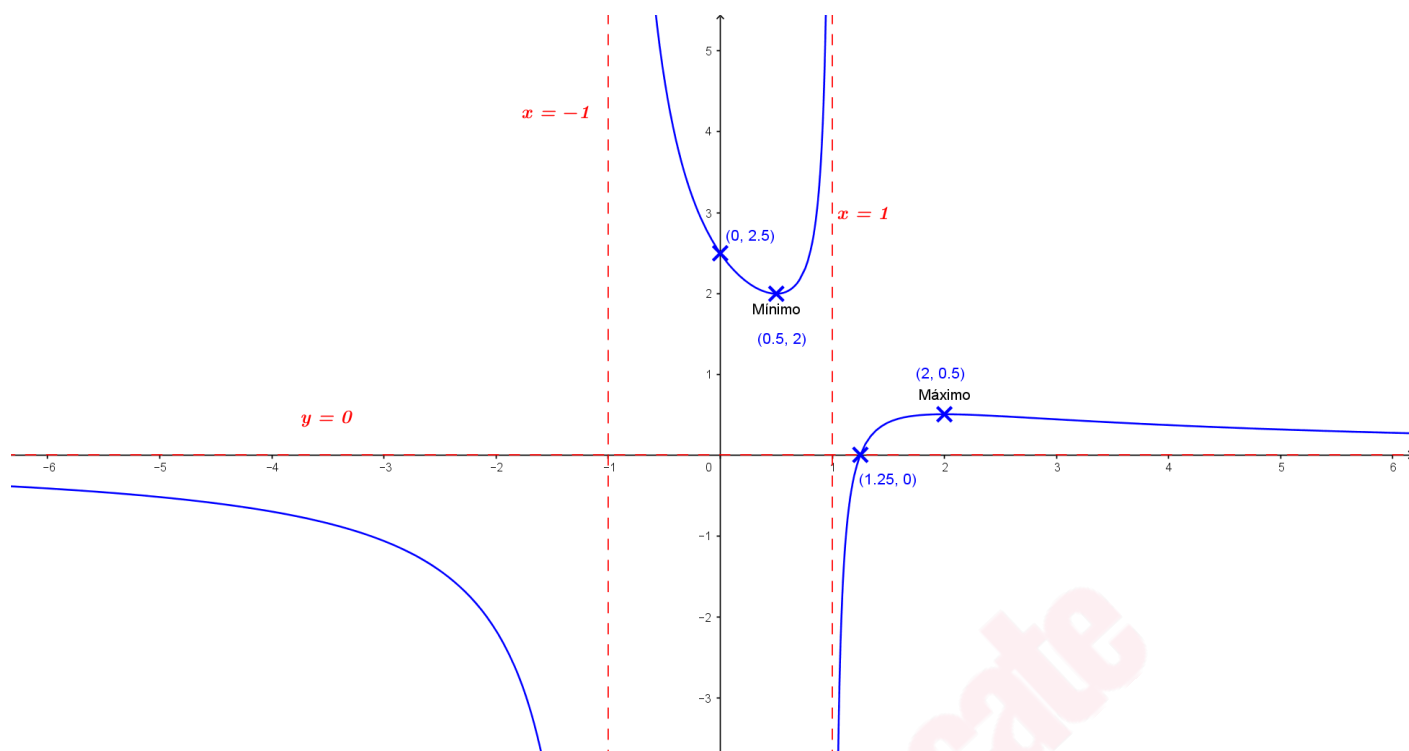
La posición de la curva respecto de su asíntota vertical $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} \stackrel{x=-1.1}{=} \frac{4(-1.1)-5}{2((-1.1)^2-1)} \infty = \frac{-}{+} \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} \stackrel{x=-0.9}{=} \frac{4(-0.9)-5}{2((-0.9)^2-1)} \infty = \frac{-}{-} \infty = +\infty$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14 & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2 + 24x - 82 & \text{si } x \in]6,18] \\ -x + 34 & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,24]$. (3 puntos)
- Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? (4 puntos)
- Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 puntos)

Solución:

a) Continuidad de esta función en el intervalo $[0,24]$.

Como cada una de las definiciones de $f(x)$ es un polinomio de 1er o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos. Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en $x = 6$,

a) $f(6) = 2 \cdot 6 + 14 = 26$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (2x + 14) = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (-x^2 + 24x - 82) = -6^2 + 24 \cdot 6 - 82 = 26 \end{cases} = 26$$

c) $f(6) = 26 = \lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 6$.

Continuidad en $x = 18$,

d) $f(18) = -18^2 + 24 \cdot 18 - 82 = 26$

e)
$$\lim_{x \rightarrow 18} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 18^-} (-x^2 + 24x - 82) = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 18^+} (-x + 34) = -18 + 34 = 16 \end{cases} \neq \rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 18} f(x)$$

Por tanto $f(x)$ no es continua en $x = 18$

Solución: $f(x)$ es continua en $[0, 24] \sim \{18\}$.

b) ¿A qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo?

Representemos gráficamente la función (algunos cálculos están realizados en el apartado a))

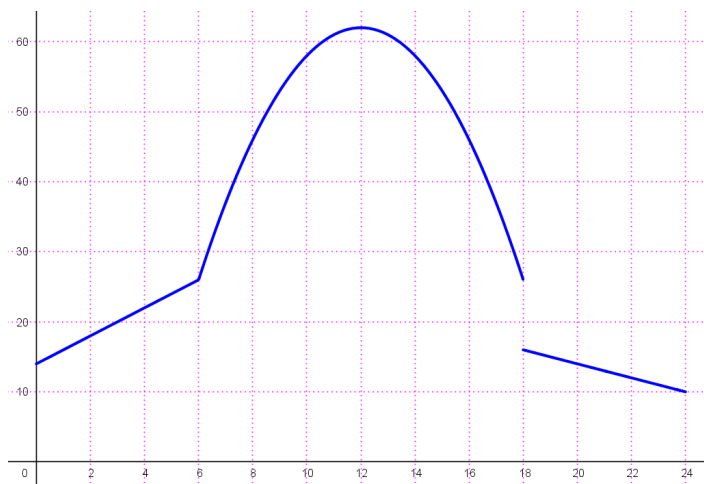
x	$2x + 14$	x	$-x^2 + 24x - 82$	x	$-x + 34$
0	14	6	26	18	16
6	26	18	26	24	10

Para completar la representación de la parábola necesitamos algún punto más. Como el polinomio de 2º grado tiene coeficiente de x^2 negativo, la parábola tiene la forma $\cap$, obtengamos el máximo.

$$g(x) = -x^2 + 24x - 82$$

$$g'(x) = -2x + 24; \quad -2x + 24 = 0; \quad -2x = -24; \quad x = \frac{-24}{-2} = 12 \in (6, 18)$$

$$g(12) = -12^2 + 24 \cdot 12 - 82 = 62 \quad \rightarrow \quad \text{máximo de la parábola} \quad (12, 62)$$



Solución: el consumo máximo se alcanza a las 12h y es de 62 Mwh y el consumo mínimo se alcanza a las 24h y es de 10 Mwh.

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Entre las 8 y las diez de la mañana la definición de $f(x)$ es $-x^2 + 24x - 82$.

El consumo que se realiza entre esas horas lo obtendremos mediante la siguiente integral definida,

$$\begin{aligned} \int_8^{10} (-x^2 + 24x - 82) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 24\frac{x^2}{2} - 82x \right]_8^{10} = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x \right]_8^{10} = \\ &= \left(-\frac{10^3}{3} + 12 \cdot 10^2 - 82 \cdot 10 \right) - \left(-\frac{8^3}{3} + 12 \cdot 8^2 - 82 \cdot 8 \right) = \frac{140}{3} - \left(-\frac{176}{3} \right) = \frac{316}{3} \cong 105'3333 \end{aligned}$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es de $\frac{316}{3}$ Mwh.

Problema 5. Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? (2 puntos)
- Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)
- ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? (3 puntos)

Solución:

Organizamos los datos del problema en la siguiente tabla.

	América		Europa		
	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	
Especialistas en ingeniería					
Especialistas en ciencias					
Totales					

De los datos del enunciado tenemos:

El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. Por tanto, de América 7 mujeres y 3 hombres; de Europa 9 mujeres y 11 hombres.

	América		Europa		
	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	
Especialistas en ingeniería	7	3	9	11	
Especialistas en ciencias					
Totales					

El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Por tanto, de América 12 mujeres y 9 hombres; de Europa 10 mujeres y 9 hombres.

	América		Europa		
	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Totales
Especialistas en ingeniería	7	3	9	11	30
Especialistas en ciencias	12	9	10	9	40
Totales	19	12	19	20	70
	31		39		

Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

$$a) P(\text{sea de Europa}) = \frac{39}{70}$$

$$b) P(\text{sea hombre y especialista en ciencias}) = \frac{9+9}{70} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$$

c) Se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

$$P(\text{sea especialista en ciencias}) = \frac{12+10}{19+19} = \frac{22}{38} = \frac{11}{19}$$

$$P(\text{sea especialista en ingeniería}) = \frac{7+9}{19+19} = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}$$

Como $\frac{11}{19} > \frac{8}{19}$ es más probable que sea especialista en ciencias.

d) Llamemos J al suceso "ser mujer" y K al suceso "ser especialista en ingeniería". ¿Son J y K sucesos independientes?

Debemos comprobar si $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$

$$\left. \begin{array}{l} P(J \cap K) = \frac{7+9}{70} = \frac{16}{70} \\ P(J) = \frac{19+19}{70} = \frac{38}{70} \\ P(K) = \frac{30}{70} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{¿} \frac{16}{70} = \frac{38}{70} \cdot \frac{30}{70} \text{?}; \quad \text{¿} \frac{16}{70} = \frac{1140}{4900} \text{?}; \quad \text{¿} 16 \cdot 4900 = 70 \cdot 1140 \text{?}; \quad \text{¿} 78400 = 79800 \text{?} \quad \text{No} \end{array}$$

Por tanto, los sucesos J y K no son independientes.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. En una población hay dos compañías, A y B , que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

- Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A . (3 puntos)
- Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B ? (4 puntos)
- Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A ” y C el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$. (3 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

A = El hogar tiene contratado el servicio de internet con la compañía A

B = El hogar tiene contratado el servicio de internet con la compañía B

TP = El hogar tiene contratado el servicio de televisión de pago

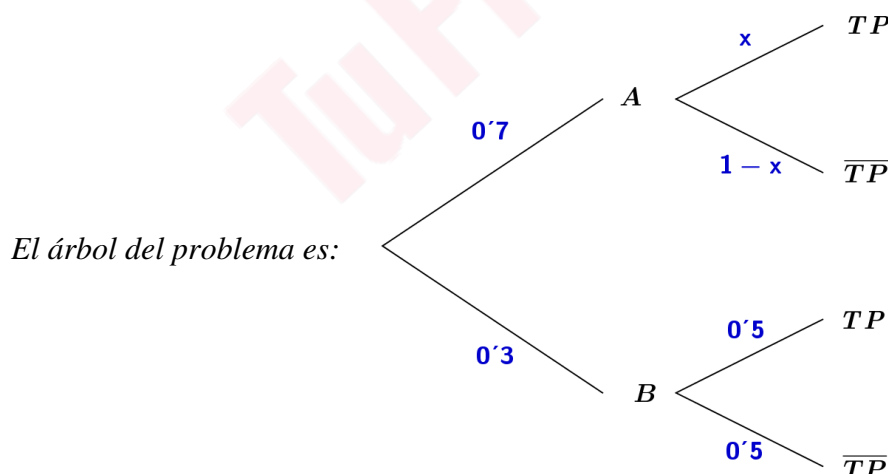
$\overline{TP}$ = El hogar no tiene contratado el servicio de televisión de pago

De los datos del enunciado,

“La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet”, entonces $P(A) = 0.70$ y por lo tanto $P(B) = 1 - 0.70 = 0.30$

“Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago”, luego entre los clientes de la compañía B $P(TP) = 0.5$ y $P(\overline{TP}) = 0.5$.

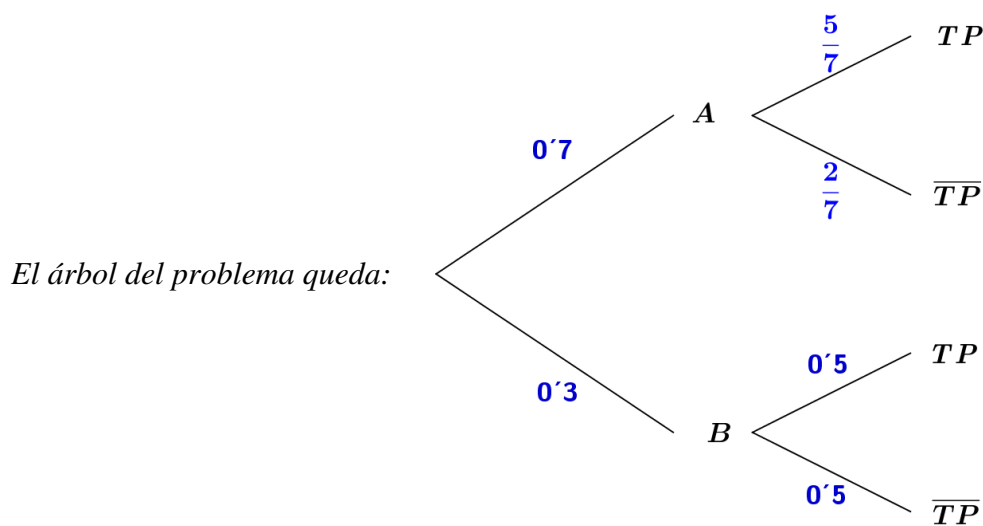
Sobre los clientes de la compañía A todavía no sabemos el porcentaje de los que contratan o no televisión de pago, luego en A $P(TP) = x$ y $P(\overline{TP}) = 1 - x$



Calculemos el valor de x . Del enunciado sabemos que “el 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago” $\rightarrow P(TP) = 0.65$

Por otro lado, del árbol: $P(TP) = 0.7x + 0.3 \cdot 0.5 = 0.7x + 0.15$

Luego, $0.7x + 0.15 = 0.65$; $0.7x = 0.65 - 0.15$; $0.7x = 0.50$; $x = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7}$ y $1 - x = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$



- a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

La probabilidad pedida es: $P(A \cap \overline{TP})$

$$P(A \cap \overline{TP}) = 0.7 \cdot \frac{2}{7} = 0.2$$

Solución: el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A es del 20%.

- b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

La probabilidad pedida es: $P\left(\frac{B}{\overline{TP}}\right)$

$$P\left(\frac{B}{\overline{TP}}\right) = \frac{P(B \cap \overline{TP})}{P(\overline{TP})} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.7 \cdot \frac{2}{7} + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{15}{35} \cong 0.4286$$

Solución: la probabilidad pedida es 0.4286.

- c) Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y C el suceso "haber contratado la televisión de pago".

Calcula $P(A \cup C)$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.7 \\ P(C) = 0.7 \cdot \frac{5}{7} + 0.3 \cdot 0.5 = 0.65 \\ P(A \cap C) = 0.7 \cdot \frac{5}{7} = 0.5 \end{array} \right\} \rightarrow P(A \cup C) = 0.7 + 0.65 - 0.5 = 0.85$$

Solución: $P(A \cup C) = 0.85$