Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2024--2025 · Modelo alternativo v4

Soluciones originales, desarrolladas desde el enunciado y comprobadas mediante cálculos independientes.

Bloque A

Ejercicio 1 · Ecuaciones y matrices

a) Sean $m < i < M$ los tres números, de menor a mayor. El algoritmo de la división permite escribir

$$M = 6m + 4, \qquad M = 2i + 6, \qquad m + i + M = 113.$$

De la segunda igualdad y la primera, $i = (6m + 4 - 6)/2 = 3m - 1$. Al sustituir en la suma resulta $m + (3m - 1) + (6m + 4) = 113$, de donde $m = 11$. Así, $i = 32$ y $M = 70$. Se comprueban las divisiones: $70 = 6 \cdot 11 + 4$ y $70 = 2 \cdot 32 + 6$.

$$\boxed{\text{Los números son } 11,\ 32 \text{ y } 70.}$$

b) Primero sumamos las matrices y calculamos la inversa de esa suma:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Para comparar con la suma de inversas, calculamos cada una. Como $\det A = 5$ y $\det B = -2$, ambas inversas existen:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \neq (A + B)^{-1}.$$

La operación «invertir» no distribuye sobre la suma; en este caso se verifica que los dos resultados son distintos.

$$\boxed{(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.}$$

Ejercicio 2 · Optimización de la producción

Sean x e y los kg de abono A y B. El beneficio a maximizar es $B(x, y) = 15x + 10y$. La producción cumple

$$0 \le x \le 200, \qquad 2y - 3x \le 100, \qquad x + 2y \le 500, \qquad y \ge 0.$$

Una función lineal alcanza su máximo en un vértice del recinto factible. Los vértices se obtienen de los ejes y de las intersecciones de las rectas frontera: $(0, 0)$, $(0, 50)$, $(100, 200)$, $(200, 150)$ y $(200, 0)$. Por ejemplo, la intersección de las dos últimas restricciones oblicuas se calcula resolviendo

$$2y - 3x = 100, \quad x + 2y = 500 \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (100, 200).$$

Evaluamos el beneficio:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 50)$	$(100, 200)$	$(200, 150)$	$(200, 0)$
$B(x, y)$	0	500	3500	4500	3000

El máximo corresponde a $(200, 150)$ y satisface ambas restricciones activas: $2(150) - 3(200) = -300 \le 100$ (la primera no es activa) y $200 + 2(150) = 500$. El vértice se forma por $x = 200$ y $x + 2y = 500$.

$$\boxed{\text{Producir } 200 \text{ kg de } A \text{ y } 150 \text{ kg de } B; \quad B_{\max} = 4500\ €.}$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Decaimiento exponencial y tangente

La cantidad restante viene dada por $f(t) = 10(1/2)^{t/30}$, con $t \ge 0$. Para que quede la mitad de la cantidad inicial debe cumplirse $f(t) = 5$; entonces $(1/2)^{t/30} = 1/2$ y $t = 30$ años.

Para la tangente en $t = 10$ usamos $y - f(10) = f'(10)(t - 10)$. Al derivar una exponencial de base $1/2$,

$$f'(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/30}\frac{\ln(1/2)}{30} = -\frac{\ln 2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{t/30}.$$

Así, $f(10) = 10\,2^{-1/3}$ y $f'(10) = -(\ln 2/3)2^{-1/3}$, por lo que

$$y - 10\,2^{-1/3} = -\frac{\ln 2}{3\,2^{1/3}}(t - 10).$$

Al tender t a $+\infty$, la potencia $(1/2)^{t/30}$ tiende a cero: la asíntota horizontal es $y = 0$. La función es finita y continua para todo $t \geq 0$, así que no presenta asíntotas verticales.

$$\boxed{t_{1/2} = 30 \text{ años}; \quad y - \frac{10}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}(t - 10); \quad y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}}$$

Bloque C

Ejercicio 4 · Probabilidad condicionada

Sean B, I y P los modelos Básico, Intermedio y Premium, y sea A el suceso «pantalla de tipo A». Las proporciones de modelos son $0{,}35$, $0{,}45$ y $0{,}20$. Usando que la probabilidad total de pantalla A es $0{,}53$,

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(I)P(A \mid I) + P(P)P(A \mid P),$$

$$0{,}53 = 0{,}35(0{,}80) + 0{,}45P(A \mid I) + 0{,}20(0{,}05).$$

De aquí, $P(A \mid I) = 0{,}24/0{,}45 = 8/15$. Para invertir la condición en b), aplicamos Bayes:

$$P(I \mid A) = \frac{P(I)P(A \mid I)}{P(A)} = \frac{0{,}45(8/15)}{0{,}53} = \frac{24}{53}.$$

$$\boxed{P(A \mid I) = \frac{8}{15}; \qquad P(I \mid A) = \frac{24}{53}.}$$

Ejercicio 5 · Probabilidad total y Bayes

Sean A y B las escuelas y C el suceso «danza clásica». Se sabe que $P(A) = 0{,}20$, $P(B) = 0{,}80$, $P(C \mid A) = 0{,}70$ y $P(B \cap C) = 0{,}32$. La probabilidad total de clásica es

$$P(C) = P(A)P(C \mid A) + P(B \cap C) = 0{,}20(0{,}70) + 0{,}32 = 0{,}46.$$

En B, la probabilidad de clásica es $P(C \mid B) = 0{,}32/0{,}80 = 0{,}40$, así que $P(C^c \mid B) = 0{,}60$. Además, $P(C^c) = 1 - 0{,}46 = 0{,}54$. Por Bayes,

$$P(B \mid C^c) = \frac{P(B \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{0{,}80(0{,}60)}{0{,}54} = \frac{8}{9}.$$

Para el apartado d), se encadenan las condiciones: primero estar en A, después practicar clásica y, entre estos, hacer un máster:

$$P(A \cap C \cap M) = P(A)P(C \mid A)P(M \mid A \cap C) = 0{,}20(0{,}70)(0{,}80) = 0{,}112.$$

$$\boxed{P(C) = 0{,}46; \quad P(C^c \mid B) = 0{,}60; \quad P(B \mid C^c) = \frac{8}{9}; \quad P(A \cap C \cap M) = 0{,}112.}$$

Bloque D

Ejercicio 6 · Intervalo y tamaño muestral para una proporción

La proporción muestral de familias con mascota es $\hat{p} = 240/600 = 0{,}4$. El intervalo bilateral para una proporción es $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$. Con confianza del 95%, $z_{0{,}975} = 1{,}96$:

$$0{,}4 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4(0{,}6)}{600}} = 0{,}4 \pm 0{,}0392,$$

de modo que el intervalo es $(0{,}3608, 0{,}4392)$. Como $0{,}5$ no pertenece al intervalo, no se puede considerar compatible con estos datos que la mitad de las familias tenga mascota, al nivel de confianza indicado.

El error máximo es $E = z\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$. Para exigir $E \le 0{,}025$,

$$n \ge \frac{1{,}96^2(0{,}4)(0{,}6)}{0{,}025^2} = 1475{,}1744.$$

Redondeamos hacia arriba, porque el tamaño muestral debe ser entero y debe garantizar el error máximo.

$$\boxed{IC_{95\%} = (0{,}3608, 0{,}4392); \quad n_{\text{mín}} = 1476.}$$

Ejercicio 7 · Intervalo para la media y distribución de la media muestral

La media muestral de los 13 pesos es $\bar{x} = 66{,}3/13 = 5{,}1$ kg. Como la población es Normal y se conoce $\sigma = 0{,}9$ kg, usamos

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Con confianza del $98{,}5\%$, $z_{0{,}9925} \approx 2{,}4324$, por lo que el error es $2{,}4324(0{,}9/\sqrt{13}) \approx 0{,}6072$ kg. Así, el intervalo es $(4{,}4928, 5{,}7072)$ kg.

Interpretamos «error inferior al 10%» como un error inferior al 10% de la media muestral, es decir, $E < 0{,}10(5{,}1) = 0{,}51$ kg. De $z\sigma/\sqrt{n} < 0{,}51$ se obtiene

$$n > \left(\frac{2{,}4324(0{,}9)}{0{,}51}\right)^2 \approx 18{,}425,$$

por lo que hacen falta al menos 19 mochilas.

Si la media poblacional es $4{,}9$ kg y se seleccionan 36 mochilas, la media muestral sigue $\bar{X} \sim N(4{,}9, 0{,}9/\sqrt{36}) = N(4{,}9, 0{,}15)$. Estandarizamos el límite $5{,}2$:

$$P(\bar{X} \le 5{,}2) = P\left(Z \le \frac{5{,}2 - 4{,}9}{0{,}15}\right) = P(Z \le 2) \approx 0{,}9772.$$

$$\boxed{IC_{98{,}5\%} = (4{,}4928, 5{,}7072) \text{ kg}; \quad n_{\text{mín}} = 19; \quad P(\bar{X} \le 5{,}2) \approx 0{,}9772.}$$

tuProfealRescate