

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

- Estudiar cuando la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene solución en función del parámetro real m . (4 puntos)
- Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando estas existan. (6 puntos)

Solución:

a) Calculemos A^2 ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

¿ $\text{ran}(A^2)$ en función de m ?

Estudiemos $|A^2|$,

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 3(m^2+3) - 3m \cdot m = 3m^2 + 9 - 3m^2 = 9 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A^2) = 3$$

Como su rango es 3, que es el máximo posible, la ecuación $A^2 X = B$ tiene solución única.

b) ¿Solución de la ecuación matricial?

Como $|A^2| \neq 0 \rightarrow \exists (A^2)^{-1}$ (la matriz inversa de A^2).

La solución X , la obtendremos de la siguiente forma:

$$A^2 X = B; (A^2)^{-1} A^2 X = (A^2)^{-1} B \rightarrow I X = (A^2)^{-1} B \rightarrow X = (A^2)^{-1} B$$

Calculemos $(A^2)^{-1}$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{vmatrix} m^2+3 & m \\ 3m & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & m \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & m^2+3 \\ 0 & 3m \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3m^2+9-3m^2 & 0 & 0 \\ 6+6m-6m & 3 & 3m \\ 2m+2m^2-2m^2-6 & m & m^2+3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3m \\ 2m-6 & m & m^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -3m \\ 2m-6 & -m & m^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A^2)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & (2m-6)/9 \\ 0 & 1/3 & -m/9 \\ 0 & -m/3 & (m^2+3)/9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces, } X = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & (2m-6)/9 \\ 0 & 1/3 & -m/9 \\ 0 & -m/3 & (m^2+3)/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + 9 \frac{2m-6}{9} \\ \frac{-m}{9} 9 \\ \frac{m^2+3}{9} 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$$

Tu Profe al Rescate

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) Obtener la matriz $(A B^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
- b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} . (4 puntos)

Solución:

a) Cálculo de $A B^T + I$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A B^T + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $A B^T + I$

$$|A B^T + I| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \exists (A B^T + I)^{-1}$$

Calculemos la inversa de $A B^T + I$

$$A B^T + I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A B^T + I)^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A B^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$

b) ¿ $C^2 = -\alpha^3 I$?

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha^3 I$$

Comprobado que $C^2 = -\alpha^3 I$

Cálculo de C^{13} ,

Utilizamos el resultado obtenido antes ($C^2 = -\alpha^3 I$)

$$C^{13} = C^{12} C = (C^2)^6 C = (-\alpha^3 I)^6 C = \alpha^{18} I^6 C = \alpha^{18} I C = \alpha^{18} C = \alpha^{18} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,\alpha)$, obtener:

- Los valores del parámetro real α , si existen, para los son paralelas las rectas r y la recta que pasa por los puntos P y Q . (6 puntos)
- La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P . (4 puntos)

Solución:

a) ¿ α ? / $r \parallel s$ (s es la recta que pasa por P y Q)

$$\text{De la recta } s \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } P(0,0,3) \\ \text{vector director } \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2,2,\alpha-3) \end{cases}$$

recta r , ¿ $\vec{v}_r$?

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (-1, -1, 3)$$

$$r \parallel s \quad \text{si} \quad \frac{2}{-1} = \frac{2}{-1} = \frac{\alpha-3}{3} \rightarrow -2 = \frac{\alpha-3}{3} \rightarrow \alpha-3 = -6 \rightarrow \alpha = -3$$

Solución: las rectas r y s son paralelas cuando $\alpha = -3$

b) ¿Plano π ? / $\pi \perp r$ y $P \in \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π .

$$\text{Como } \pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, -1, 3)$$

La ecuación del plano π será: $-x - y + 3z + D = 0$

Como el punto $P(0,0,3) \in \pi \rightarrow -0 - 0 + 3 \cdot 3 + D = 0; 9 + D = 0; D = -9$

Luego $\pi: -x - y + 3z - 9 = 0$ o bien $x + y - 3z + 9 = 0$

Solución: la ecuación del plano pedido es $x + y - 3z + 9 = 0$.

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 5, 2)$ se pide:

- Comprobar que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q . (2 puntos)
- Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s . (3 puntos)
- Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r . (5 puntos)

Solución:

a) ¿ $Q \in r$?

Comprobemos que el punto $Q(2, 6, 0)$ cumple las ecuaciones de la recta r .

$$\begin{cases} 5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 0 = 16 \\ 9 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot 0 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16 = 16 & \text{Sí} \\ 12 = 12 & \text{Sí} \end{cases} \rightarrow Q \in r$$

¿recta s ? / s es la recta que pasa por P y Q .

$$\text{De la recta } s \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } P(0, 5, 2) \\ \text{vector director } \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -2) \end{cases} \rightarrow s: \frac{x-0}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$\text{Luego } s: \frac{x}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

b) ¿Ángulo que forman r y s ? ($\hat{r, s}$)

El ángulo lo obtendremos a partir de los vectores directores de las dos rectas.

De la recta s obtuvimos su vector director en el apartado anterior: $\vec{v}_s = (2, 1, -2)$

Como de la recta r tenemos su ecuación implícita, el cálculo de su vector director es:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 28\vec{j} - 14\vec{k} = (14, 28, -14) \approx (1, 2, -1)$$

$$\cos(\hat{r, s}) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{|(-1, -2, 1) \cdot (2, 1, -2)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \sqrt{9}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(\hat{r, s}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 35'2644''$$

Solución: las rectas r y s forman un ángulo de $35'2644''$.

c) ¿Proyección ortogonal del punto P en la recta r ?

Los cálculos a realizar son:

i) Plano (π) que contiene a P y es perpendicular a r .

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π .

$$\text{Como } \pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, -1)$$

La ecuación del plano π será: $x + 2y - z + D = 0$

Como el punto $P(0,5,2) \in \pi \rightarrow 0 + 2 \cdot 5 - 2 + D = 0; \quad 8 + D = 0; \quad D = -8$
 Luego $\pi: x + 2y - z - 8 = 0$

ii) Corte entre π y r .

Nos interesa tener la ecuación vectorial de la recta r .

De los dos apartados anteriores, de la recta conocemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{punto } Q(2,6,0) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = (1,2,-1) \end{array} \right. \rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π

$$2 + \lambda + 2(6 + 2\lambda) - (-\lambda) - 8 = 0; \quad 2 + \lambda + 12 + 4\lambda + \lambda - 8 = 0; \quad 6 + 6\lambda = 0; \quad 6\lambda = -6; \quad \lambda = -1$$

$$\text{Sustituyendo este valor de } \lambda \text{ en la ecuación de } r \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + (-1) = 1 \\ y = 6 + 2(-1) = 4 \\ z = -(-1) = 1 \end{array} \right. , \text{ punto } (1,4,1)$$

Solución: la proyección ortogonal del punto P en la recta r es el punto $(1,4,1)$.

Tu Profeta al Rescate

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obtener:

- El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
- El área comprendida entre la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=2$. (4 puntos)

Solución:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$

Dom $f(x)$,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} \rightarrow x \neq 0 \\ \ln(x+1) \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Dom } f(x) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Asíntotas,

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) = \frac{1}{-1} + \ln(0) = -1 + \infty = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) = \frac{1}{0} + \ln(1) = \infty + 0 = \infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) = \frac{1}{+\infty} + \ln(+\infty) = 0 + (+\infty) = +\infty \rightarrow \text{no hay asíntota horizontal.}$$

Oblicua,

$$y = m x + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)^* = 0 \end{cases} \rightarrow m = 0$$

* {como x es un infinito de orden superior a $\ln(x+1)$ }

No hay asíntota oblicua por ser $m = 0$.

El dominio de $f(x)$ es $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ y sus asíntotas son $x = -1$ y $x = 0$.

b) Monotonía y extremos.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1), \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$. Obtengamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$.

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0'618 \in \text{Dom } f(x) \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1'618 \in \text{Dom } f(x) \end{cases}$$

$$x^2(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x^2=0 \rightarrow x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

Considerando el dominio de $f(x) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos,



x	$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$	
-0'7	$\frac{-1}{(-0'7)^2} + \frac{1}{-0'7+1} = 1'29... > 0$	Es decir:
-0'5	$\frac{-1}{(-0'5)^2} + \frac{1}{-0'5+1} = -2 < 0$	
1	$\frac{-1}{1^2} + \frac{1}{1+1} = -0'5 < 0$	
2	$\frac{-1}{2^2} + \frac{1}{2+1} = 0'083... > 0$	

$f(x)$ es creciente en $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y es decreciente en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

En $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ como la función pasa de creciente a decreciente hay un máximo relativo y

en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como la función pasa de decreciente a creciente hay un mínimo relativo.

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \frac{2}{1-\sqrt{5}} + \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cong -2'5805$$

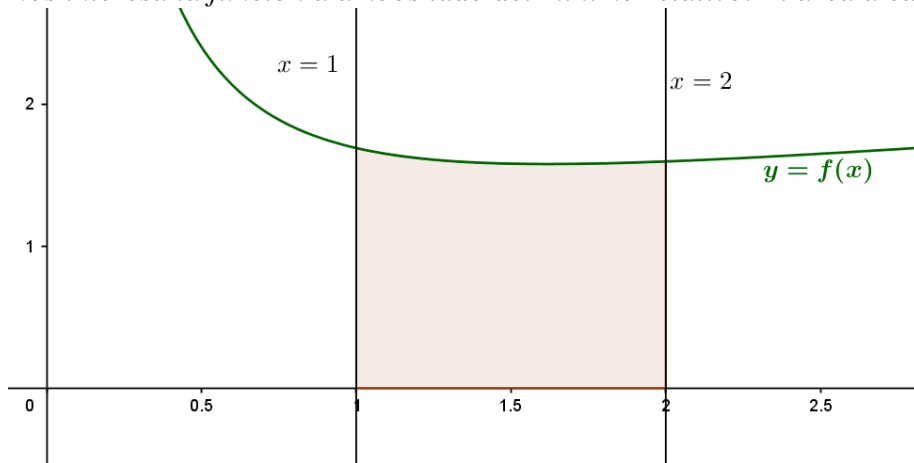
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 1'5805$$

La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{1-\sqrt{5}} + \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \cong (-0'618, -2'5805)$ y

un mínimo relativo en $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) \cong (1'618, 1'5805)$.

c) Área entre $f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

Nos interesa la función a ambos lado del mínimo relativo. El área a calcular gráficamente es:



El área la obtendremos mediante la siguiente integral definida $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx$.

Los valores de x están comprendidos entre 1 y 2, por tanto podemos emplear indistintamente $\ln(x)$ o $\ln|x|$.

Calculamos la integral de cada uno de los sumandos,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

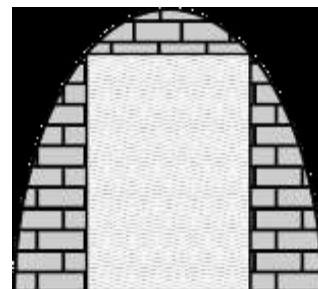
$$\begin{aligned} \int \ln(x+1) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = \\ & \left\{ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \rightarrow \int \frac{x}{x+1} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(x+1) \right\} \\ & \stackrel{*}{=} x \ln(x+1) - (x - \ln(x+1)) = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1) \ln(x+1) - x \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \ln(x) + (x+1) \ln(x+1) - x,$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx &= [\ln(x) + (x+1) \ln(x+1) - x]_1^2 = \\ &= [\ln(2) + (2+1) \ln(2+1) - 2] - [\ln(1) + (1+1) \ln(1+1) - 1] = \ln 2 + 3 \ln 3 - 2 - (0 + 2 \ln 2 - 1) = \\ &= \ln 2 + 3 \ln 3 - 2 - 2 \ln 2 + 1 = 3 \ln 3 - \ln 2 - 1 = \ln 27 - \ln 2 - 1 = \ln \left(\frac{27}{2} \right) - 1 \cong 1.6027 \end{aligned}$$

$$\text{Solución: el área pedida es de } \ln \left(\frac{27}{2} \right) - 1 \text{ u.a.} \cong 1.6027 \text{ u.a.}$$

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



- Calcular las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
- Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra. (4 puntos)

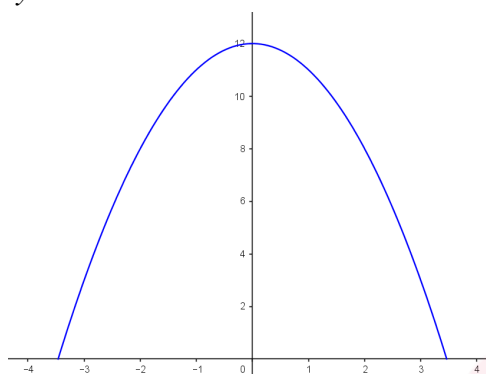
Solución:

Representemos gráficamente el problema:

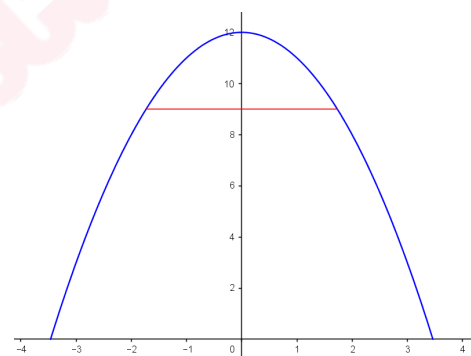
Parábola $y = -x^2 + 12$

$$x = 0 \rightarrow y = 12$$

$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 12 = 0 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.4641$$



La puerta rectangular a poner es este corte de la muralla tiene sus dos esquinas superiores en la parábola.



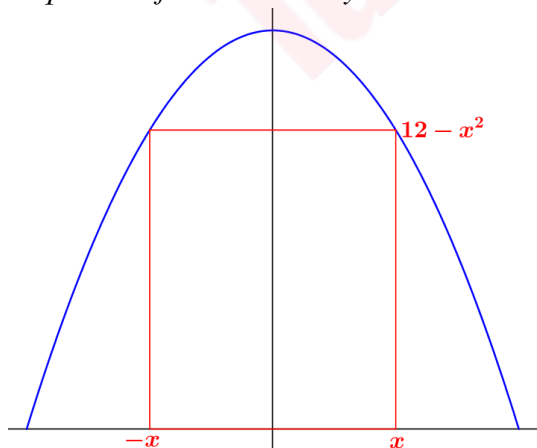
Fijadas las esquinas superiores, con $y \in [0, 12]$, las esquinas inferiores de la puerta serán:

$$\forall y \in [0, 12] \rightarrow y = -x^2 + 12 \rightarrow x^2 = 12 - y \rightarrow x = \pm\sqrt{12 - y}$$

Las esquinas inferiores quedan simétricas respecto del origen de coordenadas.

Para que los cálculos sean más sencillos utilizaremos los siguientes valores para las esquinas.

Esquinas inferiores $-x$ y x con $0 < x < 2\sqrt{3}$. Esquinas superiores $12 - x^2$. Gráficamente:



El área de la puerta es:

$$A(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$$A(x) = 24x - 2x^3 \quad 0 < x < 2\sqrt{3}$$

- Dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

$$24 - 6x^2 = 0; \quad 6x^2 = 24; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2, \quad \text{como } 0 < x < 2\sqrt{3}, \text{ entonces } x = 2.$$

$$A''(x) = -12x; \quad A''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0, \text{ por tanto en } x = 2 \text{ hay un máximo relativo.}$$

Obtenemos el signo de $A'(x)$ a la derecha e izquierda de $x = 2$.

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

$$x = 1'5 \rightarrow A'(1'5) = 24 - 6 \cdot 1'5^2 = 11'5 > 0 \text{ creciente}$$

$$x = 2'5 \rightarrow A'(2'5) = 24 - 6 \cdot 2'5^2 = -13'5 < 0 \text{ decreciente}$$

Por tanto, como $A(x)$ es creciente a la izquierda de 2 y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.

$$\text{Para } x = 2, y = 12 - 2^2 = 8$$

Solución: para que la puerta tenga la mayor superficie posible sus dimensiones son de 4 m de base y 8 m de altura.

b) Utilizando la puerta del apartado anterior.

El área de la puerta del apartado anterior es: $8 \times 4 = 32 \text{ m}^2$.

Calculemos el área del corte vertical, que es el área encerrada por la parábola.

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2) dx &= \left[12x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \left(12 \cdot 2\sqrt{3} - \frac{(2\sqrt{3})^3}{3} \right) - \left(12 \cdot (-2\sqrt{3}) - \frac{- (2\sqrt{3})^3}{3} \right) = \\ &= 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} - \left(-24\sqrt{3} - \frac{-24\sqrt{3}}{3} \right) = 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} + 24\sqrt{3} - \frac{24\sqrt{3}}{3} = 48\sqrt{3} - \frac{48\sqrt{3}}{3} = 32\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución: el área de la parte frontal de la puerta es 32 m^2 y el área de la parte frontal de la entrada recubierta de piedra es $(32\sqrt{3} - 32) \text{ m}^2 \cong 23'4256 \text{ m}^2$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2 . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y .

- Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
- Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

C_1 = obtener cara en la moneda M_1 .

X_1 = obtener cruz en la moneda M_1

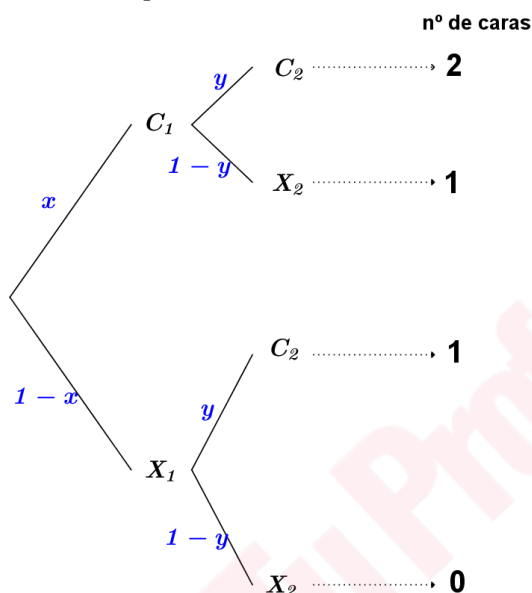
C_2 = obtener cara en la moneda M_2 .

X_2 = obtener cruz en la moneda M_2

De los datos del problema, $P(C_1) = x \rightarrow P(X_1) = 1 - x$; $P(C_2) = y \rightarrow P(X_2) = 1 - y$.

- Lanzamos las dos monedas al mismo tiempo y se pregunta por el número de caras obtenidas.

El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

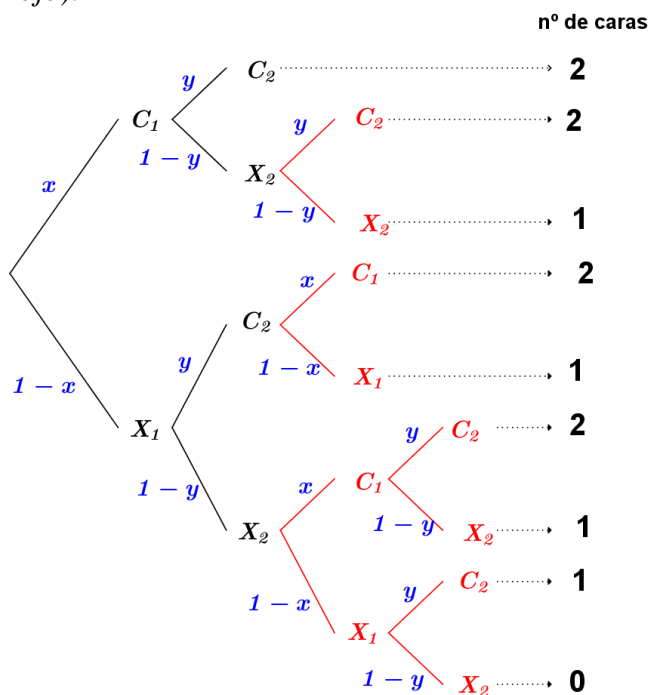
$$P(\text{no obtener ninguna cara}) = (1 - x)(1 - y)$$

$$P(\text{obtener solo una cara}) = x(1 - y) + (1 - x)y$$

$$P(\text{obtener dos caras}) = xy$$

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara.

Partiendo del árbol del apartado anterior lanzamos las monedas que salieron cruz (las nuevas ramas están en rojo):



Las probabilidades pedidas son:

$$P(\text{no obtener ninguna cara}) = (1-x)^2 (1-y)^2$$

$$P(\text{obtener solo una cara}) = x (1-y)^2 + (1-x)^2 y + (1-x) (1-y)^2 x + (1-x)^2 (1-y) y$$

$$P(\text{obtener dos caras}) = x y + x (1-y) + (1-x) x y + (1-x) (1-y) x y$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

- Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
- Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos referidos al fin de semana:

TN = vuelo procede del territorio nacional

UE = vuelo procede de la Unión Europea

EX = vuelo procede de fuera de la Unión Europea

R = el vuelo se retrasa

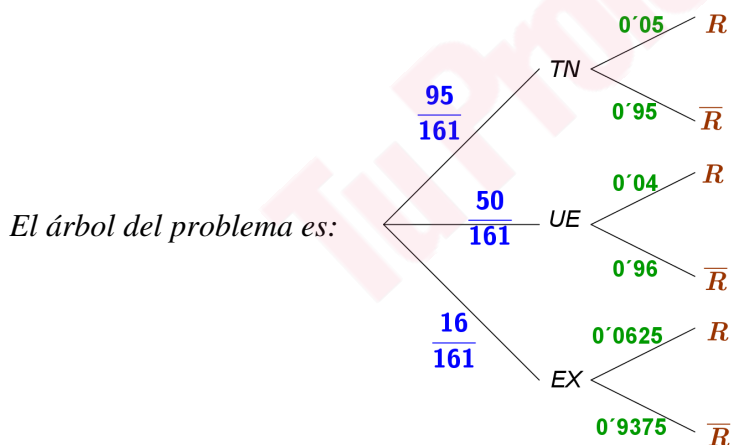
$\bar{R}$ = el vuelo no se retrasa

De los datos del problema, $P(TN) = \frac{95}{161} \rightarrow P(UE) = \frac{50}{161}; P(EX) = \frac{16}{161}$

Si el vuelo procede del territorio nacional $\rightarrow P(R) = 0.05$ y $P(\bar{R}) = 1 - 0.05 = 0.95$

Si el vuelo procede de la Unión Europea $\rightarrow P(R) = 0.04$ y $P(\bar{R}) = 1 - 0.04 = 0.96$

Si el vuelo procede de fuera de la Unión Europea $\rightarrow P(R) = 0.0625$ y $P(\bar{R}) = 1 - 0.0625 = 0.9375$



- a) Probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.

$$P(R) = \frac{95}{161} 0.05 + \frac{50}{161} 0.04 + \frac{16}{161} 0.0625 = \frac{31}{161} \approx 0.1925$$

- b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.

$$P\left(\frac{UE}{R}\right) = \frac{P(UE \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} 0.04}{\frac{31}{161}} = \frac{2}{31} \approx 0.0645$$